

บทที่ 6 สนามแม่เหล็กคงตัว

วัตถุประสงค์

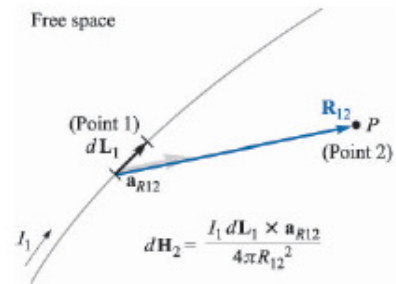
1. เป็นการแนะนำเข้าสู่เรื่องสนามแม่เหล็ก ด้วยเรื่องสนามแม่เหล็กคงตัว
2. เพื่อให้เข้าใจพื้นฐานของสนามแม่เหล็ก รวมถึงกฎ และ ทฤษฎีพื้นฐานในเรื่องสนามแม่เหล็ก
3. เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาในเรื่องต่อไป ของสนามแม่เหล็ก

6.1 กฎของ Biot-Savart

แหล่งกำเนิดของสนามแม่เหล็กมีหลายแหล่งไม่ว่าจะเป็น จากแท่งแม่เหล็กถาวร การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าในหน่วยเวลาและกระแสไฟฟ้ากระแสตรง ซึ่งในบทเริ่มต้นของสนามแม่เหล็กนี้จะเป็นการกล่าวถึงสนามแม่เหล็กจากกระแสไฟฟ้ากระแสตรงส่วนสองแหล่งที่เหลือนี้จะกล่าวถึงในบทต่อไป ในบทนี้ จะเป็นการกล่าวถึงสนามแม่เหล็กที่เกิดจากส่วนของไฟฟ้ากระแสตรงที่มีขนาดเล็กๆ

จากกระแสอนุพันธ์ขนาดเล็ก ที่เทียบได้กับกระแสที่ไหลในท่อทรงกระบอกขนาดเล็กที่รัศมีเข้าสู่ศูนย์ที่มีความยาวตามแนวแกนความยาวขนาดเล็กแสดงในรูปซ้ายมือ ด้วยกฎของ Biot-Savart ที่กำหนดให้ความสัมพันธ์ของสนามแม่เหล็กที่จุด P กับ ค่าอนุพันธ์กระแสได้เป็น

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{L}}{4\pi r^2} \times \vec{a}_r$$



\vec{H} ความเข้มสนามแม่เหล็กมีหน่วยคือ แอมแปร์ต่อเมตร A/m ซึ่งสามารถพิจารณาสอดคล้องกับ ความเข้มสนามไฟฟ้าในการพิจารณา ในบทนี้จะเป็นการพิจารณากระแสไฟฟ้ากระแสตรง ซึ่งประจุไฟฟ้าไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนั้น จาก

บทที่ 5

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

ดังนั้นแล้ว

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

ให้พิจารณาที่ระบบที่ล้อมด้วยพื้นผิวที่ปิดจะเห็นว่าถ้ามีกระแสไหลเข้ามาจะทำกับกระแสที่ไหลออกเนื่องจากเป็นค่ากระแสตรงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา (เปรียบเทียบกับกรหาประจุไฟฟ้าจากกรณีที่ความหนาแน่นของเส้นแรงไฟฟ้ามีค่าคงที่เมื่อหาผลรวมของเส้นแรงไฟฟ้าที่ผิวปิดใดๆ มีค่าเป็นศูนย์ หมายความว่าผิวปิดนั้นไม่มีประจุอิสระภายในหรือถ้ามีก็จะมีประจุบวกเท่ากับลบ)

อย่างไรก็ตาม จากกฎของ Biot-Savart สนามแม่เหล็กสามารถหาได้จากการอินทิเกรต ตามเส้นทางปิด (closed path)

$$\vec{H} = \oint \frac{I d\vec{L}}{4\pi r^2} \times \vec{a}_r \quad \text{I/m}$$

จากการกระจายของกระแสในรูปแบบต่าง (ค่ากระแสในส่วนเล็กเป็นแหล่งกำเนิดของสนามแม่เหล็ก)

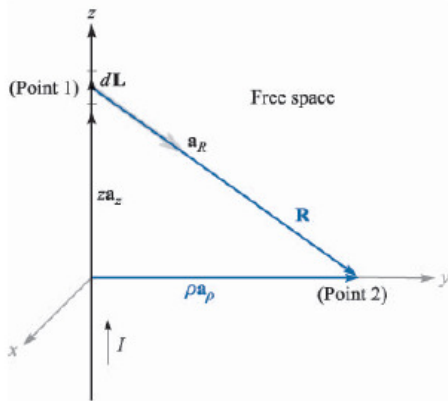
$$I d\vec{L} = \vec{K} dS = \vec{J} dv$$

โดยที่ \vec{K} เป็นความหนาแน่นของกระแสนผิว A/m และ \vec{J} เป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า A/m² ซึ่งจะเป็นผลคูณของกระแสในหลอดตัวนำที่มีพื้นที่หน้าตัดเล็กมากๆ และมีความยาวเป็นอนุพันธ์ ดังนั้นในสองกรณีหลังสนามแม่เหล็กที่จุดใดสามารถหาได้โดยลำดับดังนี้

$$\vec{H} = \int_S \frac{\vec{K} dS}{4\pi r^2} \times \vec{a}_r \quad \text{และ}$$

$$\vec{H} = \int_v \frac{\vec{J} dv}{4\pi r^2} \times \vec{a}_r$$

ในการหาค่าสนามแม่เหล็กก็สามารถหาได้ทำนองเดียวกับกรณีของการหาค่าสนามไฟฟ้า สมมติว่าแท่งตัวนำไฟฟ้าขนาดของพื้นที่หน้าตัดเล็กมากความยาวอนันต์ ค่าสนามแม่เหล็กที่จุด Point2 จากสมการอินทิเกรตข้างต้น



$$\vec{H} = \oint \frac{Id\vec{L}}{4\pi r^2} \times \vec{a}_r$$

พิกัดที่เหมาะสมในการวิเคราะห์ก็คือ ทรงกระบอก

$$\vec{a}_r = \frac{\vec{r}_{P2} - \vec{r}_{P1}}{|\vec{r}_{P2} - \vec{r}_{P1}|} = \frac{\rho\vec{a}_\rho - z\vec{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

เวกเตอร์ความยาวในทิศทางของกระแสคือ

$$d\vec{L} = dz\vec{a}_z$$

ดังนั้น

$$\vec{H} = \oint \frac{Idz\vec{a}_z}{4\pi r^2} \times \vec{a}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\rho dz}{4\pi(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} \vec{a}_\phi$$

จากที่ผ่านมาในการอินทิเกรตของสมการข้างต้นจะง่ายขึ้นโดยการเปลี่ยนรูปเป็น ตรีโกณมิติด้วยความสัมพันธ์ของมุมที่ทำกับแกน z จะได้

$$z = \rho \cot \theta : dz = -\rho \csc^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \int_{-\pi}^0 \frac{I\rho}{4\pi} \left(\frac{-\rho \csc^2 \theta d\theta}{\rho \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}}} \right) \vec{a}_\phi = \frac{I}{4\pi\rho} \int_{-\pi}^0 -\sin \theta d\theta \vec{a}_\phi = \frac{I}{4\pi\rho} \cos \theta \Big|_{-\pi}^0 \vec{a}_\phi \\ &= \frac{I}{2\pi\rho} \vec{a}_\phi \end{aligned}$$

ที่ระยะห่างจากเส้นลวดอนันต์เท่ากัน จะได้ค่าขนาดของสนามแม่เหล็กมีค่าเท่ากันบนเส้นวงกลมที่ล้อมรอบเส้นตัวนำ กระแสนั้น โดยที่เส้นตัวนำวางที่จุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น และทิศทางของสนามแม่เหล็กอยู่ในแนวเส้นสัมผัสวงกลมนั้น

หรือจะใช้เป็นมุม α ดังรูปตัวอย่างนี้ก็ได้โดยที่

$$z = \rho \tan \theta : dz = \rho \sec^2 \theta d\theta$$

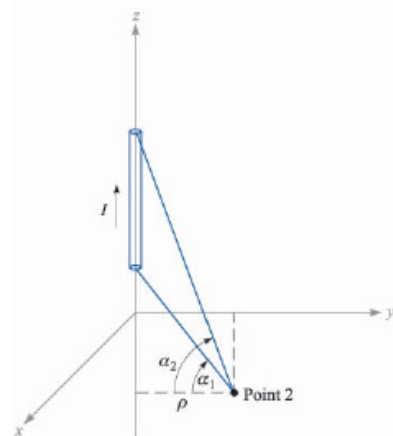
จะได้สนามแม่เหล็กจากการอินทิเกรตในทำนองเดียวกัน

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi\rho} \sin \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \vec{a}_\phi$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \vec{a}_\phi$$

(ถ้าใช้กรณีนี้เป็นการอินทิเกรตกับเส้นตัวนำกระแสนอนันต์มุม

อัลฟาจะมีอินทิเกรตจากมุม -90 ถึง 90 องศา)



ตัวอย่าง เส้นตัวนำกระแส 15 A มีความยาวเป็นอนันต์ตามแนวแกน Z จงหาสนามแม่เหล็กในพิกัด Cartesian ที่จุด

(a) $P_A(\sqrt{20}, 0, 4)$ and (b) $P_B(2, -4, 4)$

(a) From the infinite line current, the magnetic field is obtained by in cylindrical coordinates:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{a}_\phi = \frac{15}{2\pi\sqrt{20}} \vec{a}_\phi = 0.534 \vec{a}_\phi \text{ A/m}$$

But we have to answer in Cartesian coordinates, we can use the transformation matrix to transform vector in cylindrical coordinates into Cartesian coordinates. Or another way is obtained from the multiplication of the unit vectors of current direction and the position of the noticed point.

$$d\bar{L} = dz\bar{a}_z \quad \bar{r} = \sqrt{20}\bar{a}_x, \bar{a}_r = \bar{a}_x$$

$$\bar{a}_H = \bar{a}_z \times \bar{a}_x = \bar{a}_y$$

Therefore, the magnetic field in Cartesian coordinates

$$\bar{H} = 0.534\bar{a}_y \text{ A/m}$$

(b) We will do the same

$$\bar{r} = 2\bar{a}_x - 4\bar{a}_y, \bar{a}_r = \frac{2\bar{a}_x - 4\bar{a}_y}{\sqrt{20}}$$

$$\bar{a}_H = \bar{a}_z \times \bar{a}_r = \frac{2\bar{a}_y + 4\bar{a}_x}{\sqrt{20}}$$

$$\bar{H} = 0.478\bar{a}_x + 0.239\bar{a}_y \text{ A/m}$$

6.2 กฎวงจของแอมแปร์ (Ampere's Circuital Law)

ลองพิจารณาในกรณีของสนามไฟฟ้าที่ผ่านมาราพบว่ประจุไฟฟ้าเป็นแหล่งกำเนิดเส้นแรงไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า ซึ่งผลรวมของเส้นแรงไฟฟ้าในพื้นที่ผิวปิดจะมีค่าเป็นค่าประจุไฟฟ้าที่ผิวปิดนั้นล้อมรอบอยู่ ในทำนองเดียวกัน ในสนามแม่เหล็กที่เราพิจารณาในบทนี้ กระแสไฟฟ้ากระแสตรงจะเป็นแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กรอบตัวของมัน (ในเงื่อนไขที่ความยาวของกระแสมีค่ามากเมื่อเทียบกับตำแหน่งของจุดที่หาค่าสนามแม่เหล็ก) ดังนั้น กฎวงจของแอมแปร์จึงกล่าวว่ ผลการอินทิเกรตรวมค่าสนามไฟฟ้าตามแนวเส้นทางปิดมีค่าเท่ากับค่ากระแสที่เส้นทางปิดนี้ล้อมอยู่ นั่นเอง

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = I$$

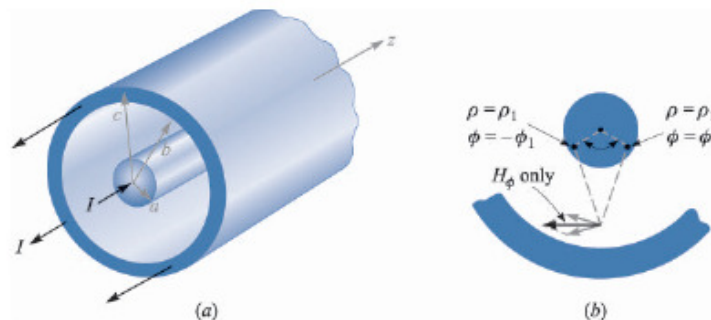
และด้วยกฎมือขวาทิศทางของสกรู (หรือหัวแม่มือขวาชี้ตามทิศทางของกระแสทิศทางของการกำม็วอนเป็นทิศทางของสนามแม่เหล็ก)

เพื่อเป็นการยืนยันกฎวงจของแอมแปร์ ในกรณีเส้นกระแสนันต์โดยที่ $\bar{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\bar{a}_\phi$ และ $d\bar{L} = \rho d\phi\bar{a}_\phi$

ดังนั้น

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = \oint \frac{I}{2\pi\rho}\bar{a}_\phi \cdot \rho d\phi\bar{a}_\phi = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi} d\phi = I$$

ลองพิจารณารูปข้างล่างแล้วหาความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าที่จุดที่ห่างจากจุดศูนย์กลางกับรัศมีที่จากจุดศูนย์กลางนั้น

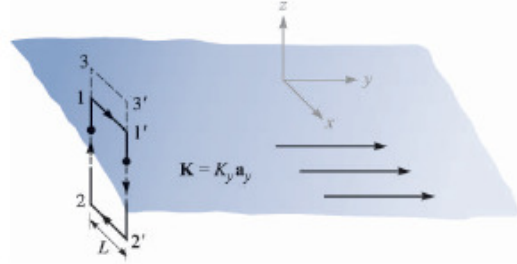


จากตัวอย่างข้างต้นเป็นการพิจารณากระแสที่ไหลในตัวนำที่มีขนาดเล็ก ในส่วนต่อไปนี้จะเป็นการใช้รูปแบบเดียวกันกับกระแสที่ตัวนำที่มีขนาดบางมากๆ เรียกกระแสประเภทนี้ว่า กระแสเชิงผิว จากรูป และกฎวงจรของแอมแปร์จะได้ว่า

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_1^{1'} + \int_{1'}^{2'} + \int_{2'}^2 + \int_2^1 = I = K_y L$$

$$H_{x1}L + H_{x2}(-L) = K_y L$$

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$



ลองพิจารณาที่เส้นทางปิด 3-3'-2'-2 จึงได้เป็น

$$H_{x3} - H_{x2} = K_y \text{ A/m}$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $H_{x1} = H_{x3}$ ที่เหนือแผ่นกระแสทุกระยะจะมีค่าสนามแม่เหล็กเท่ากัน (แต่ก็มีเงื่อนไขที่ว่าขนาดพื้นที่ของแผ่นกระแสมีขนาดใหญ่เมื่อเทียบกับระยะที่สังเกต หรืออีกกรณีก็คือเรื่องของขนาดพื้นที่ของแผ่นกระแสไม่ได้เป็นผลกระทบหลักของการพิจารณา) และ มีขนาดเท่ากับค่าสนามแม่เหล็กทางด้านล่างของแผ่นกระแสแต่มีทิศทางสวนกัน $\vec{H}_1 = \vec{H}_3 = -\vec{H}_2$ ซึ่งจะสรุปได้เป็น

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{K} \times \vec{a}_N \text{ A/m}$$

โดยที่ \vec{a}_N เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นกระแสของแต่ละด้าน

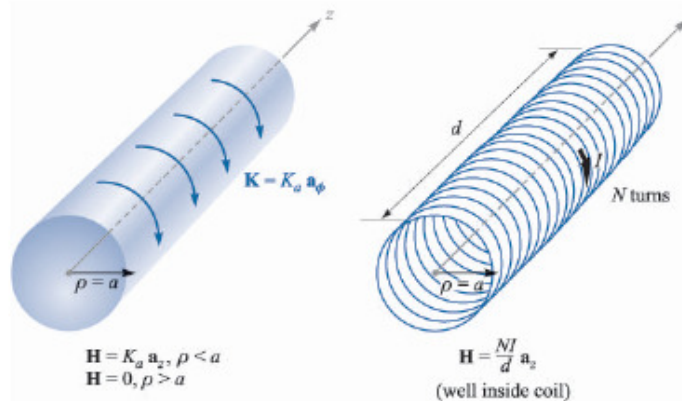
ถ้ามีอีกแผ่นกระแสวางขนานกันกับแผ่นกระแสข้างต้นที่วางอยู่ที่ตำแหน่ง $z = 0$ โดยวางที่ $z = h$ และมีความหนาแน่นกระแสเป็น $\vec{K} = -K_y \vec{a}_y \text{ A/m}$ ดังนั้น

$$\vec{H} = \vec{K} \times \vec{a}_N \quad \text{For } 0 < z < h$$

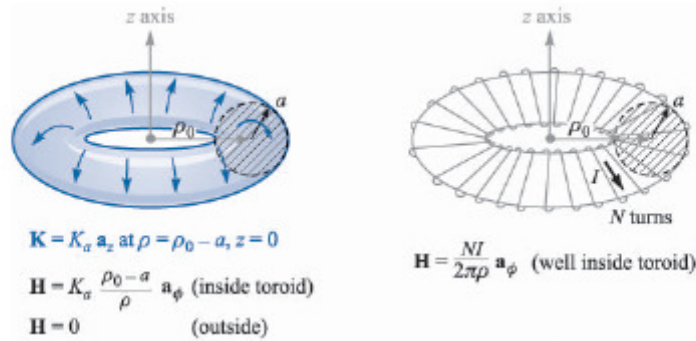
$$\vec{H} = 0 \quad \text{For } z < 0 \text{ and } z > h$$

หลักการนี้ได้ถูกนำไปใช้ในการหาค่าสนามแม่เหล็กของขดลวด Solenoid และ Toroid ซึ่งที่ภายในของขดลวดนั้นจะมีค่าสนามแม่เหล็ก แต่สนามแม่เหล็กจะหักล้างกันภายนอกของขดลวดนั้นเป็นไปดังคำอธิบายของการหาค่าสนามแม่เหล็กของแผ่นประจุที่วางตัวขนานกันนั่นเอง (ลองพิจารณาที่จุดที่สนามแม่เหล็กเป็นศูนย์นั้นเป็นการมองที่จุดที่กระแสจะมีลักษณะวางตัวในแนวขนานกันตลอดทุกจุดที่พิจารณา ก็คือการพิจารณาในแนวสัมผัส) หรือจะเป็นการอธิบายจากกรณีของการหาค่าสนามแม่เหล็กบนวงกลมที่ล้อมรอบกระแสที่มีค่าเท่ากับผลรวมของกระแสที่มันล้อมรอบอยู่ (มองที่ภาพรวมขนาดใหญ่ที่รวมทั้งสองข้างในแนวสัมผัส)

ตัวอย่างของ Solenoid เป็นไปตามนิยามดังรูป ค่าที่ได้จากการวิเคราะห์แผ่นกระแสจะเป็นเพียงแนวทางอ้างอิงเท่านั้น และค่าสนามแม่เหล็กที่ได้นั้นจะเป็นค่าโดยประมาณ



สำหรับที่ขดลวดที่พันตั้งรูปขวามือบนนั้นสามารถพิจารณาหาค่าความหนาแน่นของกระแสได้เป็น $K = \frac{NI}{d}$ และค่าสนามแม่เหล็กโดยประมาณสามารถหาได้จากค่าความหนาแน่นของกระแสที่ได้



แต่ค่าสนามแม่เหล็กจะเป็นฟังก์ชันที่ของระยะจากจุดศูนย์กลางของ Toroids ดังแสดงในรูปข้างบน

6.3 Curl

อ้างอิงถึงกรณีของการหาค่าความสัมพันธ์กันระหว่างการอินทิเกรตเชิงผิวกับปริมาตรในกฎของเกาส์โดยทฤษฎีของไควเวิร์เจนต์ ในทำนองเดียวกัน เราจะประยุกต์การอินทิเกรตเวกเตอร์กับกฎของแอมแปร์ในส่วนนี้ ซึ่งจะเกิดการประยุกต์ใช้ ตัวจัดการที่มีชื่อว่า Curl ด้วยการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

สมมติเวกเตอร์ในระบบพิกัด Cartesian จากรูปด้านขวามือ ค่าสนามแม่เหล็กที่จุดศูนย์กลางของเส้นทางปิด 1-2-3-4 คือ

$$\bar{H} = H_{x0} \bar{a}_x + H_{y0} \bar{a}_y + H_{z0} \bar{a}_z = \bar{H}_0$$

และ

$$d\bar{L} = dx \bar{a}_x + dy \bar{a}_y + dz \bar{a}_z$$

การวิเคราะห์ที่ครอบรอบเส้นทางเดินปิด 1-2-3-4 หาค่าอินทิเกรตครอบรอบเป็น

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1$$

สนามแม่เหล็กที่เส้นตรง 1-2 เวกเตอร์ระยะทางอยู่ในแกน y เท่านั้น ดังนั้น สนามแม่เหล็กในแนวแกน y จากจุดศูนย์กลางจะเพิ่มขึ้นจากอัตราการเปลี่ยนแปลงในแนวแกน x คูณกับระยะทางจากจุดศูนย์กลางเป็น

$$H_{y,1-2} = H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)$$

เช่นเดียวกัน 2-3

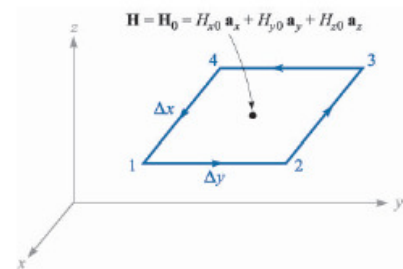
$$H_{x,2-3} = H_{x0} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \left(\frac{\Delta y}{2} \right)$$

ส่วนที่ 3-4 นั้น ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงนั้นจะมีค่าเป็นลบเพราะเป็นการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางลบของแกน x

$$H_{y,3-4} = H_{y0} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \quad 4-1 \text{ ก็เช่นเดียวกัน จึงได้เป็น}$$

$$\begin{aligned} \oint \bar{H} \cdot d\bar{L} &= H_{y,1-2} \Delta y - H_{x,2-3} \Delta x - H_{y,3-4} \Delta y + H_{x,4-1} \Delta x \\ &= \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

ซึ่ง จาก



$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = I$$

และผลของการอินทิเกรตข้างต้นจะได้

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = I = \int_S J_z dS = J_z \Delta x \Delta y$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

ในการวิเคราะห์ที่ในทำนองเดียวกันกับข้างต้น โดยเส้นทางปิดขนานกับระนาบ x-z โดยมี unit normal vector คือ \bar{a}_z ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \text{ และ พิจารณาต่อ}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

ซึ่งจากนิยามของ Curl นั้น จะเป็นที่ยอมรับเมื่อพื้นที่มีขนาดเล็กๆ มาก เข้าสู่ศูนย์

$$(\text{curl } \bar{H})_N = \lim_{\Delta S_N \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{H} \cdot d\bar{L}}{\Delta S_N}$$

ซึ่งจากทั้งสามความสัมพันธ์ของความหนาแน่นกระแส สามารถสรุปได้เป็น

$$\nabla \times \bar{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \bar{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \bar{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \bar{a}_z = \bar{J}$$

$$\text{curl } \bar{H} = \nabla \times \bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = J_x \bar{a}_x + J_y \bar{a}_y + J_z \bar{a}_z$$

เป็นการหาค่าความหนาแน่นกระแสจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กในบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิวที่ปิดล้อมด้วยเส้นทางเดินปิด

การหาเคิร์ลในระบบพิกัดอื่นๆ สามารถหาได้เช่นกัน ระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\nabla \times \bar{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \bar{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \bar{a}_\phi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) \bar{a}_\theta$$

ในระบบพิกัดทรงกลม

$$\nabla \times \bar{H} = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \bar{a}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right) \bar{a}_\theta$$

$$+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \bar{a}_\rho$$

ตัวอย่าง จากรูปด้านล่างทางขวามือ จงหาค่า เคิร์ล จากนิยามข้างต้นและการอินทิเกรตบนเส้นทางปิด สนามแม่เหล็กคือ $\bar{H} = 0.2z^2 \bar{a}_x$ A/m โดยที่ $z > 0$ และ สนามแม่เหล็กมีค่าเป็นศูนย์นอกจากนี้ กำหนดให้จุดศูนย์กลางของเส้นทางปิดอยู่ที่ $z = z_1$ โดยที่ $z_1 > 2d$

จากนิยามของการหาค่าเคิร์ล จากการอินทิเกรตบนเส้นทางเดินปิด

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = 0.2 \left(z_1 + \frac{d}{2} \right)^2 d - 0.2 \left(z_1 - \frac{d}{2} \right)^2 d$$

$$= 0.4 z_1 d^2$$

$$(\nabla \times \bar{H})_y = \lim_{dd \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{H} \cdot d\bar{L}}{dd} = 0.4 z_1 \bar{a}_y$$

และจาก

$$\nabla \times \bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0.2z^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{a}_y \left(\frac{\partial(0.2z^2)}{\partial z} \right) = 0.4z \bar{a}_y \text{ เป็นการ}$$

พิจารณาที่พื้นผิวมีค่าขนาดเล็กมากๆ ที่ $z = z_1$

$$\nabla \times \bar{H} = 0.4z_1 \bar{a}_y$$

สรุป ณ ตอนนี จาก Ampere's Circuital Law

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

เป็นสมการที่สองของ Maxwell จากทั้งสี่สมการ ซึ่งเราสามารถเขียนสมการที่สามของ Maxwell ได้จาก $\oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = 0$ (จากความหมายที่ว่างานในการเคลื่อนที่ประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วยกลับมาที่เดิมผลของงานนี้มีค่าเป็นศูนย์) ดังนั้น ในทำนองของวิธีที่การที่ใช้กับสนามแม่เหล็ก ความสัมพันธ์ระหว่างการอินทิเกรตเชิงเส้นเป็นอินทิเกรตเชิงผิว สมการที่สามของ Maxwell คือ

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

D8.4. (a) Evaluate the closed line integral of \mathbf{H} about the rectangular path $P_1(2, 3, 4)$ to $P_2(4, 3, 4)$ to $P_3(4, 3, 1)$ to $P_4(2, 3, 1)$ to P_1 , given $\mathbf{H} = 3z\mathbf{a}_x - 2x^3\mathbf{a}_z$ A/m. (b) Determine the quotient of the closed line integral and the area enclosed by the path as an approximation to $(\nabla \times \mathbf{H})_y$. (c) Determine $(\nabla \times \mathbf{H})_y$ at the center of the area.

Ans. 354 A; 59 A/m²; 57 A/m²

D8.5. Calculate the value of the vector current density: (a) in cartesian coordinates at $P_A(2, 3, 4)$ if $\mathbf{H} = x^2z\mathbf{a}_y - y^2x\mathbf{a}_z$; (b) in cylindrical coordinates at $P_B(1.5, 90^\circ, 0.5)$ if $\mathbf{H} = \frac{2}{\rho}(\cos 0.2\phi)\mathbf{a}_\rho$; (c) in spherical coordinates at $P_C(2, 30^\circ, 20^\circ)$ if $\mathbf{H} = \frac{1}{\sin \theta}\mathbf{a}_\theta$.

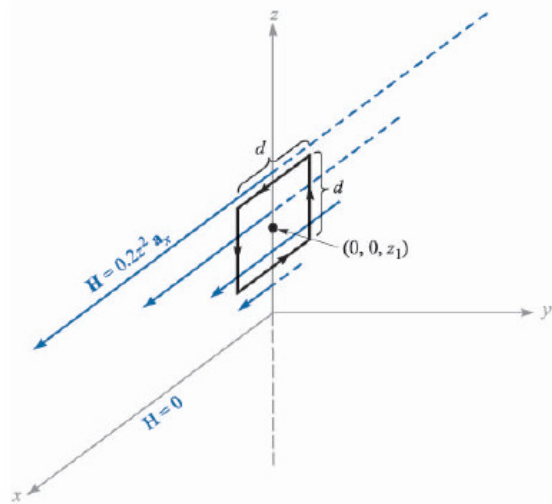
Ans. $-16\mathbf{a}_x + 9\mathbf{a}_y + 16\mathbf{a}_z$ A/m²; $0.0549\mathbf{a}_z$ A/m²; \mathbf{a}_ϕ A/m²

6.4 Stroke's Theorem

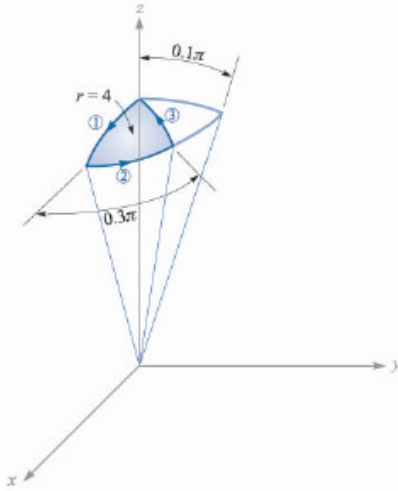
จากส่วนที่ผ่านมาเราได้พิจารณาความสัมพันธ์กันระหว่าง การอินทิเกรตเชิงเส้นกับการอินทิเกรตเชิงผิวมาแล้ว ซึ่งความสัมพันธ์นี้เป็นนิยามของ ทฤษฎีของ Stroke

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = \int_S (\nabla \times \bar{H}) \cdot d\bar{S}$$

เวกเตอร์ $d\bar{L}$ เป็นเวกเตอร์เส้นทางการเดินปิดที่ล้อมรอบพื้นผิว S พจน์ทางด้านขวามือเป็นการ dot ระหว่าง curl สนามแม่เหล็กกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับพื้นผิวนั้น



Example ใช้รูปด้านล่างเพื่อเป็นการยืนยัน Stroke's Theorem ทั้งสองข้างให้ค่ากระแสเท่ากัน พื้นผิวเป็นส่วนของทรงกลม รัศมี $r = 4$, $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$ และ $0 \leq \phi \leq 0.3\pi$ กำหนดให้สนามแม่เหล็ก $\vec{H} = 6r \sin \phi \vec{a}_r + 18r \sin \theta \cos \phi \vec{a}_\phi$



พจน์ทางด้านซ้าย ในทฤษฎีบท

$$d\vec{L} = dr\vec{a}_r + r d\theta\vec{a}_\theta + r \sin \theta d\phi\vec{a}_\phi$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_1 \vec{H} \cdot r d\theta\vec{a}_\theta + \int_2 \vec{H} \cdot r \sin \theta d\phi\vec{a}_\phi + \int_3 \vec{H} \cdot r d\theta\vec{a}_\theta$$

เพราะว่า $H_\theta = 0$ ดังนั้น

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = 0 + \int_0^{0.3\pi} 18r \sin \theta \cos \phi r \sin \phi d\phi + 0$$

$\theta = 0.1\pi$ คงที่ที่เส้นทางเดิน 3

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_0^{0.3\pi} 18(4)^2 \sin^2(0.1\pi) \cos \phi d\phi = 288 \sin^2(0.1\pi) \sin(0.3\pi) = 22.2 \text{ A}$$

ทิศทางของกระแสที่ได้คือจะตั้งฉากกับส่วนของพื้นผิวของทรงกลม คือ \vec{a}_r

จากพจน์ทางด้านขวามือของ Stroke's Theorem

$$d\vec{S} = r d\theta \times r \sin \theta d\phi \vec{a}_r \text{ และ}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \vec{a}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} \right) \vec{a}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \vec{a}_\phi$$

ดังนั้น

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_0^{0.3\pi} \int_0^{0.1\pi} (36 \cos \theta \cos \phi) 16 \sin \theta d\theta d\phi = 288 \sin^2(0.1\pi) \sin(0.3\pi) = 22.2 \text{ A}$$

จากทั้งสองพจน์ของ Stroke theorem ให้ค่าเท่ากัน ซึ่งมีค่าเป็นกระแสที่ไหลผ่านพื้นผิวนั้น และจากผลต่อเนื่องจาก Ampere's Circuital Law เป็นการอินทิเกรตบนพื้นผิวใดๆ (เป็นพื้นผิวเปิด) และใช้กับ Stroke's Theorem

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_L \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

กระแสที่ไหลผ่านพื้นผิวนั้น

พิจารณาเพิ่มเติมเรื่อง การประยุกต์ใช้ ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ ซึ่งสามารถบอกคุณสมบัติเพิ่มเติม สมมุติเวกเตอร์สนาม \vec{A} ใดๆ ดังนั้นจากความสัมพันธ์ Surface integral and volume integral โดยที่ $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$ ดังนั้น

$$\oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_V T dv$$

โดยปกติการอินทิเกรตโดย Stroke's Theorem นั้นเป็นการเริ่มอินทิเกรตรอบผิวเปิดดังนั้นถ้าเอาเส้นรอบนั้นมารวมกัน (เปรียบเทียบเหมือนการรวมเอาขอบมาเป็นจุดเดียวกัน) ดังนั้นการจะหาความสัมพันธ์ต่อจาก line integral - surface integral - volume integral จึงทำให้การใช้ Stroke's Theorem กับพื้นผิวปิดมีค่าเป็น 0

$$\int_V T dv = 0$$

เราจึงได้ว่า

$$T = 0 = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A}$$

ในระบบที่สนามแม่เหล็กไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา (Non-time varying magnetic field)

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

และ

$$\nabla \cdot \bar{J} = 0$$

ก่อนจะเริ่มกับค่าอื่นๆ ของแม่เหล็ก สรุป ณ ตอนนี้อยู่คือ.....

D8.6. Evaluate both sides of Stokes' theorem for the field $\mathbf{H} = 6xy\mathbf{a}_x - 3y^2\mathbf{a}_y$ A/m and the rectangular path around the region, $2 \leq x \leq 5$, $-1 \leq y \leq 1$, $z = 0$. Let the positive direction of $d\mathbf{S}$ be \mathbf{a}_z .

Ans. -126 A; -126 A

6.5 เส้นแรงแม่เหล็กและความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็ก

ใน Free space ความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็ก (Magnetic flux density) สามารถหาได้จาก

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$$

โดยที่ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m และค่าความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กมีหน่วยเป็น Tesla or Wb/m² ในการพิจารณาทำนองเดียวกันกับกรณีของสนามไฟฟ้ากับความเข้มของสนามไฟฟ้า ดังนั้น เส้นแรงแม่เหล็กที่ผ่านพื้นที่ S หนึ่งเป็น

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} \text{ เวเบอร์ (Weber)}$$

สังเกตว่าการหาเส้นแรงแม่เหล็กผ่านพื้นผิวทำให้เรานึกถึงการหาเส้นแรงไฟฟ้าที่ผ่านพื้นผิว ซึ่งการอินทิเกรตผิวปิดเส้นแรงไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากับค่าประจุไฟฟ้าที่ผิวปิดนั้นล้อมรอบอยู่ เนื่องจากเส้นแรงไฟฟ้ารวมไปถึงเส้นประจุไฟฟ้าจะจุดเริ่มต้นหรือสิ้นสุดที่ประจุไฟฟ้า แต่เส้นแรงแม่เหล็กหรือสนามแม่เหล็กนั้นจะไม่มีจุดเริ่มต้นหรือสิ้นสุดให้สังเกตจากสนามแม่เหล็กที่เกิดจากส่วนของกระแสไฟฟ้าในตัวนำที่มีความยาวเป็นอนันต์ จะล้อมรอบตัวนำเป็นวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางที่เส้นตัวนำนั้น ดังนั้น ผลรวมของเส้นแรงแม่เหล็กจึงมีค่าเป็นศูนย์

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$$

และจากทฤษฎีไดเวอร์เจนต์จึงได้ว่า

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

ซึ่งเป็นสมการที่ 4 ของ Maxwell ดังนั้น สมการ Maxwell ทั้ง 4 สมการ สำหรับสนามไฟฟ้าสถิตย์และสนามแม่เหล็กสถิตย์ คือ

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v$$

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

และยังมีความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องใน Free space ที่จำเป็น ดังนี้

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} \quad \bar{B} = \mu_0 \bar{H} \quad \text{และ} \quad \bar{E} = -\nabla V$$

ซึ่งจากสมการทั้ง 4 ของ Maxwell มีการอินทิเกรตที่เกี่ยวข้องเป็นการใช้งานของสมการเหล่านี้เองในการแก้ปัญหาของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \int_V \rho_v dv = \int_V \nabla \cdot \bar{D} dv = Q$$

$$\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{L} = 0$$

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{L} = \int_S \nabla \times \bar{H} \cdot d\bar{S} = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S}$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$$

D8.7. A solid conductor of circular cross section is made of a homogeneous nonmagnetic material. If the radius $a = 1$ mm, the conductor axis lies on the z axis, and the total current in the a_z direction is 20 A, find: (a) H_ϕ at $\rho = 0.5$ mm; (b) B_ϕ at $\rho = 0.8$ mm; (c) the total magnetic flux per unit length inside the conductor; (d) the total flux for $\rho < 0.5$ mm; (e) the total magnetic flux outside the conductor.

Ans. 1592 A/m; 3.2 mT; $2\mu\text{Wb}$; $0.5\mu\text{Wb}$; ∞

(a) จากสมการค่าสนามแม่เหล็กจากเส้นลวดที่มีความยาวเป็นอนันต์

$$\bar{H} = \bar{H}_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \bar{a}_\phi = \frac{20/(0.001^2) \times (0.0005^2)}{2\pi \cdot 0.5 \times 10^{-3}} \bar{a}_\phi = 1591.5 \bar{a}_\phi \text{ A/m}$$

(b) ค่าความเข้มสนามแม่เหล็ก

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H}_\phi = \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho} \bar{a}_\phi = \frac{20/(0.001^2) \times (0.0008^2)}{2\pi \cdot 0.5 \times 10^{-3}} \bar{a}_\phi = 0.0032 \bar{a}_\phi \text{ Tesla}$$

(c) ค่าเส้นแรงแม่เหล็กไฟฟ้าต่อความยาวที่ผ่านพื้นผิวที่กำหนดภายในตัวนำ

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = \int \bar{B} \cdot l d\rho \bar{a}_\phi \\ \Phi/l &= \int_0^{1m} \frac{\mu_0 I (\rho/lm)^2}{2\pi\rho} d\rho \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} (20)}{4\pi (1m)^2} \rho^2 \Big|_0^{1m} = 2\mu \end{aligned}$$

(d) ค่าเส้นแรงแม่เหล็กไฟฟ้าต่อความยาวที่ผ่านพื้นผิวที่กำหนดภายในตัวนำที่รัศมีน้อยกว่า 0.5 mm

$$\Phi/l = \frac{4\pi \times 10^{-7} (20)}{4\pi (1m)^2} \rho^2 \Big|_0^{0.5m} = 0.5\mu \text{ Wb/m}$$

(e) ค่าเส้นแรงแม่เหล็กไฟฟ้าต่อความยาวที่ผ่านพื้นผิวที่ภายนอกตัวนำ

$$\Phi/l = \frac{4\pi \times 10^{-7} (20)}{4\pi (1m)^2} \rho^2 \Big|_0^\infty = \infty$$

6.6 ศักย์แม่เหล็กสเกลาร์และเวกเตอร์ศักย์แม่เหล็ก

จากสนามไฟฟ้าสถิตย์ค่าสนามไฟฟ้าสามารถหาได้จาก -gradient ของค่าศักย์ไฟฟ้าสถิตย์ ซึ่งสามารถเข้าใจได้ถึงกายภาพของค่าเหล่านี้ได้เนื่องจากค่าศักย์ไฟฟ้าสามารถสื่อได้ทางกายภาพ แต่สำหรับสนามแม่เหล็กแล้ว มีคำถามว่าเราสามารถพิจารณาศักย์แม่เหล็ก เช่นเดียวกับศักย์ไฟฟ้าได้หรือไม่ และเราจะสามารถที่จะกำหนดนิยามศักย์แม่เหล็กในลักษณะทางกายภาพอย่างเช่นเดียวกับสนามไฟฟ้าได้หรือไม่

จากคุณสมบัติการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์แล้วคำถามแรกนั้นสามารถทำได้แน่นอน แต่สำหรับคำถามที่สองข้างต้นนั้นคำตอบก็บางครั้ง แต่การวิเคราะห์นั้นก็ยิ่งทำได้เพื่อเป็นการ กำหนดให้ ศักย์แม่เหล็กคือ V_m และในทำนองเดียวกันกับสนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็กสามารถหาได้จาก

$$\bar{H} = -\nabla V_m$$

และจาก สมการที่ได้ก่อนหน้านี้นี้ทำให้ได้

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} = \nabla \times (-\nabla V_m)$$

แต่อย่างไรก็ตาม เวกเตอร์ของเกรเดียนต์ใดๆ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงจะได้ ความหนาแน่นของกระแสที่ผ่านพื้นผิวปิดที่สนามแม่เหล็กหาได้จาก ศักย์แม่เหล็กสเกลาร์ที่ตัวนั้น

$$\bar{H} = -\nabla V_m, (\bar{J} = 0)$$

จะเห็นได้ว่า ค่าศักย์แม่เหล็กมีความคล้ายคลึงกับศักย์ไฟฟ้าในการวิเคราะห์ในรูปแบบข้างต้น แต่ก็มีความแตกต่างที่จะต้องคำนึงถึงอยู่ เช่น ค่าศักย์แม่เหล็กจะไม่ใช่ค่าเดียวที่เป็นฟังก์ชันของจุด แต่ศักย์ไฟฟ้าจะเป็นค่าเดียวที่เป็นฟังก์ชันของจุด พิจารณาที่ สาย Coaxial จากรูปด้านล่างนี้

ในพื้นที่ระหว่าง รัศมี $a < \rho < b$, $\bar{J} = 0$ ค่าสนามแม่เหล็กมีค่าเป็น

$$\bar{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \bar{a}_\phi$$

เราสามารถหาค่าศักย์แม่เหล็กจากความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} \bar{H} &= -\nabla V_m = \frac{I}{2\pi\rho} \bar{a}_\phi \text{ หรือ} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_m}{\partial \phi} &= \frac{I}{2\pi\rho} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$V_m = -\frac{I}{2\pi} \phi$$

ซึ่งจากสนามไฟฟ้า สมการที่สองของ Maxwell

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = 0$$

แต่การอินทิเกรตเชิงเส้นที่เป็นอิสระต่อเส้นทางเดินขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและสิ้นสุดเท่านั้น คือ

$$-\int_b^a \bar{E} \cdot d\bar{L} = V_{ab}$$

แต่ในสนามแม่เหล็ก

$$\nabla \times \bar{H} = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อในบริเวณที่ } \bar{J} = 0$$

แต่

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = I$$

ซึ่งถ้าไม่มีกระแสที่ล้อมรอบจะได้ค่าศักย์แม่เหล็กจาก

$$V_{m,ab} = -\int_b^a \bar{H} \cdot d\bar{L} \text{ บนเส้นทางที่กำหนด}$$

จะต้องมีการกำหนดเส้นทางเช่น ในตัวอย่างของสาย Coaxial ถ้าเรามีการตัดหรือกั้นที่จุด (เป็นระนาบหรือเรียกอีกอย่างว่า Barrier) $\phi = \pi$ จึงทำให้ไม่ได้ล้อมรอบ I ดังนั้นจึงได้เป็น

$$V_m = \frac{I}{2\pi} \phi \text{ สำหรับ } -\pi < \phi < \pi$$

เรากล่าวถึง ศักย์แม่เหล็กแค่นี้ก่อนซึ่งจะกล่าวถึงอีกครั้งในบทถัดไป ซึ่งเวกเตอร์ศักย์แม่เหล็กเป็นค่าที่กล่าวต่อไปซึ่งจะเป็นค่าที่สำคัญมากกับการศึกษาเรื่องการกระจายคลื่นจากสายอากาศ leakage จากสายส่ง เป็นต้น เวกเตอร์ศักย์แม่เหล็กจะใช้ในบริเวณที่ค่าความหนาแน่นกระแสเป็นศูนย์หรือไม่เป็นศูนย์และจะขยายไปสู่เรื่องการเปลี่ยนแปลงตามเวลาต่อไป

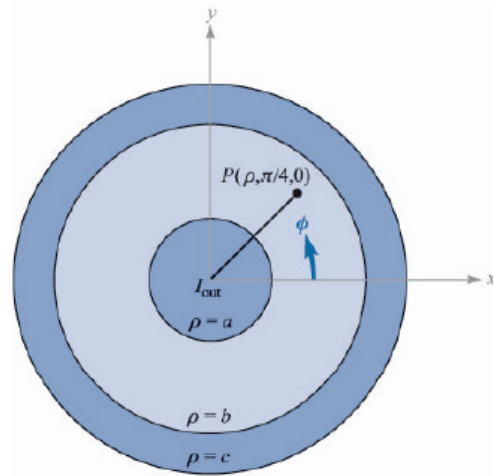
จาก $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ เราไม่สามารถหาอะไรได้ ดังนั้น เราเลือกที่จะพิจารณาจาก

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

โดยที่เวกเตอร์ A คือเวกเตอร์ศักย์แม่เหล็ก ดังนั้นเราจึงได้ว่า

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{B} = \bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \bar{A}$$

จะเห็นได้ว่า curl ของ curl ของเวกเตอร์มีค่าไม่จำเป็นจะเป็นศูนย์ (จะต่างจาก curl ของ gradient ของเวกเตอร์มีค่าเป็นศูนย์ ในกรณีของสนามไฟฟ้า)



จากนิยามของความเข้มสนามแม่เหล็กและ กฎของ Biot-savart เวกเตอร์ศักย์แม่เหล็กสามารถหาได้จาก

$$\bar{A} = \oint \frac{\mu_0 Id\bar{L}}{4\pi R}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุพันธ์เป็น

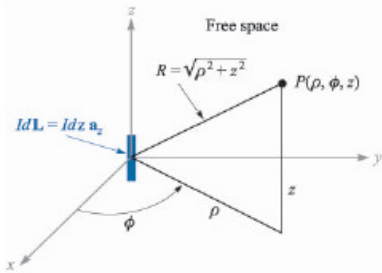
$$d\bar{A} = \frac{\mu_0 Id\bar{L}}{4\pi R}$$

จากรูปซ้ายมือ จึงได้เป็น

$$d\bar{A} = \frac{\mu_0 Idz}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \bar{a}_z \quad dA_\rho = 0, dA_\phi = 0$$

เราจะได้ว่าทิศทางของอนุพันธ์ของเวกเตอร์ศักย์ไฟฟ้าคือทิศทาง

เดียวกับ $Id\bar{L}$



ดังนั้น ความสัมพันธ์ของค่าสนามแม่เหล็ก(ความเข้มสนามแม่เหล็ก)กับเวกเตอร์ศักย์แม่เหล็กจึงเป็น จากรูปตัวอย่างข้างต้น

$$\begin{aligned} d\bar{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times d\bar{A} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial d\bar{A}_z}{\partial \rho} \right) \bar{a}_\phi \\ &= \frac{Idz}{4\pi} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \bar{a}_\phi \end{aligned}$$

และจากแผ่นกระแสและปริมาตรที่มีค่าความหนาแน่นที่กระแสที่พื้นที่หน้าตัด อนุพันธ์ของเวกเตอร์ศักย์ไฟฟ้าสามารถหาได้ตามลำดับคือ

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int_S \frac{\mu_0 \bar{K} dS}{4\pi R} \quad \text{และ} \\ \bar{A} &= \int_{vol} \frac{\mu_0 \bar{J} dv}{4\pi R} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง ในบริเวณ $3.5 < \rho < 4.5$ cm, $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 < z < 2$ cm เป็น ส่วนที่ไม่มีกระแสไหลและมีค่าสนามแม่เหล็กในแนว ϕ เป็น $H_\phi = 70/\rho$ A/m จงหาค่า ศักย์แม่เหล็กสเกลาร์ที่ $\rho = 3.8$, $\phi = 110^\circ$, $z = 0.5$

(a) ถ้า $V_m = 0$ at $\phi = 0$ และมีแผงกั้น (Barrier) ที่ $\phi = 180$

จาก $V_{m,ab} = -\int_b^a \bar{H} \cdot d\bar{L}$ สามารถ อินทิเกรตต่อเนื่องในทางทวนเข็มนาฬิกาได้จึงได้เป็น

$$\begin{aligned} V_{m,110-0} &= -\int_0^{110} 70/\rho \cdot dL = -\frac{70}{\rho} \rho\phi \Big|_0^{11\pi/18} \\ &= -134.4 \text{ A} \end{aligned}$$

(b) ถ้า $V_m = 0$ at $\phi = 0$ และมีแผงกั้น (Barrier) ที่ $\phi = 90$

ซึ่งความต่อเนื่องของการอินทิเกรตจะ โคนตัดถ้าเริ่มจากศูนย์ไปทางทวนเข็มนาฬิกาจึงต้องหาอีกทางคือ

$$\begin{aligned} V_{m,110-360} &= -\int_{360}^{110} 70/\rho \cdot dL = -\frac{70}{\rho} \rho\phi \Big|_{2\pi}^{11\pi/18} \\ &= 305 \text{ A} \end{aligned}$$

(b) ถ้า $V_m = 0$ at $\phi = 180$ และมีแผงกั้น (Barrier) ที่ $\phi = 0$

$$V_{m,110-180} = -\int_{180}^{110} 70/\rho \cdot dL = -\frac{70}{\rho} \rho\phi \Big|_{\pi}^{11\pi/18}$$

$$= 85.5 \text{ A}$$

(b) ถ้า $V_m = 0$ at $\phi = 180$ และมีแผงกั้น (Barrier) ที่ $\phi = 150$

$$V_{m,110-(-180)} = -\int_{-180}^{110} 70/\rho \cdot dL = -70(11\pi/18 - (-\pi))$$

$$= -354 \text{ A}$$

ความสัมพันธ์ ระหว่าง Vector magnetic potential

$$\bar{H} = \oint \frac{Id\bar{L} \times \bar{a}_R}{4\pi R}$$

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} \text{ และ } \bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{B} = \bar{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \bar{A}$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$$

สำหรับ Cartesian coordinates

$$\nabla^2 \bar{A} = \nabla^2 A_x \bar{a}_x + \nabla^2 A_y \bar{a}_y + \nabla^2 A_z \bar{a}_z$$

สำหรับ Cylindrical coordinates and Spherical coordinates จะต่างกันขึ้นอยู่กับชนิดของ Coordinates

ที่สำคัญคือ $\nabla \times \bar{H} = \mu_0 \bar{J} = -\nabla^2 \bar{A}$ โดยส่วนใหญ่ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับระบบ

ตัวอย่าง ค่า Vector magnetic potential ที่กำหนดให้ จึงแสดงความสัมพันธ์ข้างต้น

$$\bar{A} = \frac{2 \cos \theta}{r^3} \bar{a}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \bar{a}_\theta$$

จาก

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu_0 \bar{J}$$

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{2 \cos \theta}{r^3} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \right)$$

$$= -\frac{2}{r^4} \cos \theta + \frac{2}{r^4} \cos \theta = 0$$

$$\nabla \times \bar{H} = \mu_0 \bar{J} = -\nabla^2 \bar{A}$$

$$\mathbf{A} = \frac{2 \cos \theta}{r^3} \mathbf{a}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \mathbf{a}_\theta$$