บทที่ 5 First-order and Second-order Circuits

วัตถุประสงค์

5.1 Capacitors

ลักษณะของ ตัวเก็บประจุไฟฟ้า ประกอบด้วยแผ่นตัวนำที่ถูกขั้นด้วยวัสดุที่ไม่นำไฟฟ้า

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{Q}{V}$$

โดยที่ ε คือค่า Permittivity ของวัสดุไม่นำไฟฟ้าม S พื้นที่ของตัวนำไฟฟ้า และ d ระยะห่างระหว่างแผ่นตัวนำไฟฟ้า และจาก กระแส

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

ดังนั้น

$$i = C\frac{dv}{dt} \text{ และ } v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i d\tau$$

$$v = \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i d\tau + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_o} i d\tau = \frac{1}{C}\int_{t_o}^{t} i d\tau + v(t_O)$$

ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างกระแสและแรงดันไฟฟ้านี้สามารถแสดงให้เห็นในรูปแบบของกราฟิก

สำหรับทิศทางของกระแสและขั้วของศักย์ไฟฟ้าที่ขั้วของตัวเก็บประจุ เนื่องด้วยตัวเก็บประจุจัดอยู่ในประเภท Passive element ทิศทางของกระแสที่ไหลในวงจรจะไหลเข้าที่ขั้วบวกของความต่างศักย์ที่คร่อมตัวเก็บประจุ

พลังงานที่สะสมอยู่ในตัวเก็บประจุ

$$W(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t) \text{ จูล}$$

การต่อตัวเก็บประจุไฟฟ้าแบบ อนุกรมและขนาน

5.2 Inductors

การสะสมพลังงานในตัวเหนี่ยวนำ อยู่ในลักษณะของการเรียงตัวของเส้นแรงแม่เหล็กหรือสนามแม่เหล็กที่ได้จากการเหนี่ยวนำจากกระแสที่ไหลผ่านขดลวดตัวเหนี่ยวนำ ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าคือ

$$v = L\frac{di}{dt} \text{ และทางกลับกัน } i = \frac{1}{L}\int_{t_o}^{t} v d\tau + i(t_O)$$

พลังงานที่สะสมในตัวเหนี่ยวนำ

$$W(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) \text{ จูล}$$

ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างกระแสและแรงดันไฟฟ้านี้สามารถแสดงให้เห็นในรูปแบบของกราฟิก

สำหรับทิศทางของกระแสและขั้วของศักย์ไฟฟ้าที่ขั้วของตัวเหนี่ยวนำ เนื่องด้วยตัวเก็บประจุจัดอยู่ในประเภท Passive element ทิศทางของกระแสที่ไหลในวงจรจะไหลเข้าที่ขั้วบวกของความต่างศักย์ที่คร่อมตัวเหนี่ยวนำ หรือในกรณีที่มีการจ่ายแหล่งจ่ายแล้วมีการปลดแหล่งจ่ายเพื่อที่จะดูผลตอบสนองของวงจรจากการปลดแหล่งจ่ายดังจะได้กล่าวในหัวข้อต่อๆ ไป ทิศทางของกระแสและขั้วของตัวเหนี่ยวนำยังคงเดิมกับก่อนที่มีการปลดแหล่งจ่าย (แหล่งจ่ายนั้นต่ออยู่กับวงจรนานพอ)

การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบ อนุกรมและขนาน

5.3 ลักษณะของฟังก์ชันเชิงเดี่ยวที่ใช้ในการวิเคราะห์วงจร

Unit step function: u(t), $u(t-t_O)$, Au(t)

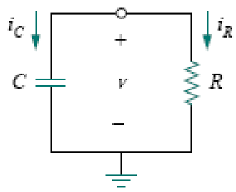
Unit impulse function: $\delta(t), \delta(t - t_O)$

Unit ramp function: r(t), r(t-t_O), Ar(t)

ฟังก์ชันการทำงานของสวิตซ์ตัดต่อแหล่งจ่ายจะถูกนำมาใช้ร่วมกับฟังก์ชันดังกล่างเบื้องต้นทำให้ได้ฟังก์ชันของแหล่งจ่ายมีรูปแบบต่างๆ ตามที่ต้องการ

5.4 วงจร RC ที่ไม่มี แหล่งจ่ายไฟฟ้า

ดังที่เป็นการกล่าวถึงคาปาซิเตอร์ที่มีการทำงานในลักษณะของการสะสมพลังงาน (charge) และจ่ายพลังงาน (discharge) ที่สะสมอยู่ในตัว ดังนั้น ที่เวลา t = 0 ค่าความต่างศักย์ที่ตัวเก็บประจุจะมีค่าเริ่มต้นอยู่ค่าหนึ่ง



$$v(0) = V_0$$

พลังงานที่สะสมในตัวเก็บประจุที่จุดเริ่มต้นเป็น

$$W_0 = \frac{1}{2}CV_0^2$$

จากรูปวงจรขวามือ และ KCL จะได้

$$i_C + i_R = 0$$

จาก $i_C = dQ/dt = Cdv/dt$ และกฎของโอห์ม สมการข้างต้นเป็น

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}$$

Solve differential equation by integrating both sides

$$\ln v = -\frac{1}{RC}t + \ln A$$

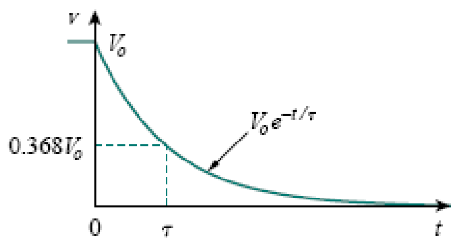
ใช้ ยกกำลังด้วย exponential

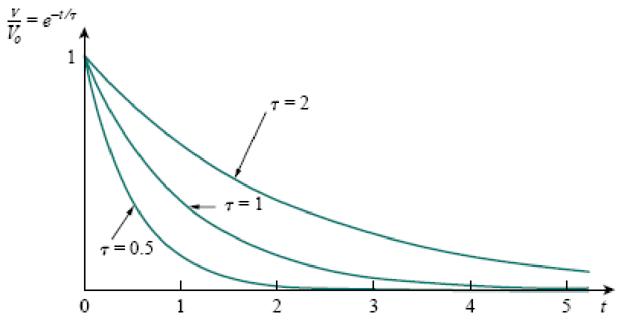
$$v(t) = Ae^{-t/RC}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้นที่ t = 0 จะเป็นการหาค่าคงที่ v(0) = V_O = A ดังนั้น

$$v(t) = V_O e^{-t/RC} = V_O e^{-t/\tau}$$

จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันข้างต้นเป็นเป็นฟังก์ชันของเวลา สามารถเขียนเป็นกราฟเส้นได้ดังรูปซ้ายมือ $\tau = RC$ เมื่อเวลา $t = \tau$ ค่าแรงดันไฟฟ้าเป็น 0.368V_O จากฟังก์ชัน จะเห็นได้ว่าตัวแปรที่ส่งผลกระทบหลักของความสัมพันธ์คือ ค่า $\tau = RC$ ซึ่งจะเป็นค่าที่กำหนดมาจากวงจรคือค่า ความจุไฟฟ้าและค่าความต้านทาน





จากรูปซ้ายมือแสดงผลของความสัมพันธ์ที่แปรตามค่า τ : Time constant แต่อย่างไรก็ตามค่าจะมีลดลงจนเป็นศูนย์เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น (อุดมคติ $v \rightarrow 0$ เมื่อ $t \rightarrow 0$)

ที่จุดเริ่มต้น ที่เวลาเท่ากับศูนย์โดยทั่วไป ตัวเก็บประจุจะมีการสะสมพลังงานอยู่สามารถหาได้จาก

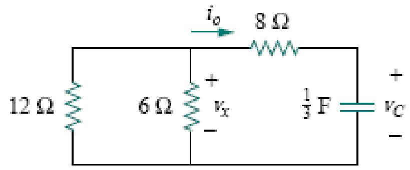
$$W_E = \int_0^t P(t)dt$$

$$P(t) = i(t)v(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

$$W_E = \int_0^t \frac{V_0^2 e^{-2t/\tau}}{R} dt = \frac{\tau}{2}\frac{V_O^2}{R}\left(1 - e^{-2t/\tau}\right) = \frac{1}{2} C V_O^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right)$$

หลักในการแก้ปัญหาโจทย์นี้ เริ่มจากหาค่าความต่างศักย์คร่อมตัวเก็บประจุ แล้วค่อยหาค่าอื่นๆ ต่อไป เช่น ค่ากระแสผ่านตัวเก็บประจุ ค่าความต่างศักย์คร่อมความต้านทาน ค่ากระแสในความต้านทาน ในการหาค่าคงที่เวลานั้น C ได้จากค่าความจุไฟฟ้าของตัวเก็บประจุ ส่วน R นั้น คือค่าความต้านทานที่ต่อขนานกับตัวเก็บประจุ ซึ่งก็คือค่าความต้านทานที่หาได้ด้วยวิธีเดียวกับ ความต้านทานเทวินิน

Example From the circuit on the right hand side, voltage at time = 0 V(0) = 30 Volts. Find v_C, v_X and i_O for t > 0



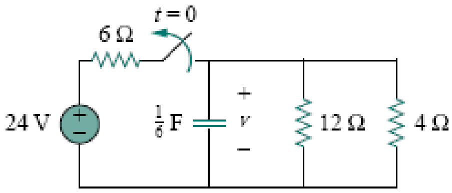
$$R = R_{TH} = 8 + 12 // 6 = 12$$

$$\tau = RC = 12/3 = 4$$

$$v_C(t) = 30e^{-t/4}$$

$$v_x(t) = \frac{v_C}{8+4} 4 = 10e^{-t/4} \text{ Volts}$$

$$i_O(t) = -\frac{v_C}{12} = -2.5e^{-t/4} \text{ A}$$



Example At time t > 0, the switch is opened. Determine v at time t > 0 storage energy at t = 0.

สิ่งแรกที่ต้องการหาในกรณีที่ยังเป็นลักษณะของวงจรที่ไม่มีแหล่งจ่าย (เมื่อเวลามากกว่าศูนย์) คือค่าแรงดันที่จุดเวลาเท่ากับศูนย์ โดยปกติถ้าเป็นไฟฟ้ากระแสตรงนั้นที่เวลาปกติ (ไม่ใช่เวลาที่ใกล้กับจุดที่มีการเปิดปิดสวิตซ์ใดๆ) ตัวเก็บประจุจะถูกพิจารณาเป็นการเปิดวงจรโดยมีแรงดันที่สามารถคำนวณหาได้โดยการวิเคราะห์วงจรโดยทั่วไป

12//4 = 3 Ohms, Therefore v can be calculated by voltage divider.

$$v(0) = \frac{24}{6+3} 3 = 8 \text{ Volts}$$

เมื่อ เปิดวงจรแล้ว ความต้านทานเทียบเคียงที่คร่อมคาปาซิเตอร์เป็น $R = 6 // 12 // 4 = 2$ Ohms

ดังนั้น $\tau = RC = 2 \times \frac{1}{6} = 1/3$

$$v(t) = 8e^{-3t}$$

$$W_E = \frac{1}{2} C V_O^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right)\Big|_{t=0} \quad \text{Jules}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{6} 8^2 = 5.33$$

5.5 วงจร RL ที่ไม่มีแหล่งจ่าย

เช่นเดียวกับวงจรในส่วนที่ผ่านมาในช่วงของการพิจารณาจะไม่มีการนำเอาแหล่งจ่ายเข้ามาพิจารณาซึ่งอาจจะมีการตัดออกจากวงจรด้วยสวิตซ์ ซึ่งที่สภาวะการเริ่มต้นการพิจารณานั้น ที่ตัวเหนี่ยวนำจะมีค่ากระแสที่เป็นค่าคงที่อยู่ค่าหนึ่งซึ่งเมื่อเวลาผ่านไปค่ากระแสเริ่มต้นนี้จะมีการลดลง

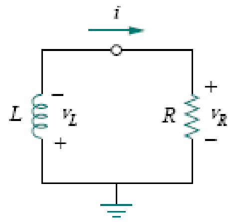
ที่จุดเริ่มต้น

$$i(0) = I_O$$

และจะมีพลังงานสะสมที่จุดเริ่มต้น

$$W_E(0) = \frac{1}{2} L I_O^2$$

จากวงจร RL ซ้ายมือ ใช้ KVL จะได้เป็น



$$v_L + v_R = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\int_{I_O}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}t$$

$$i(t) = I_O e^{-\frac{R}{L}t}$$

วงจรของ RL มี time constant $\tau = L/R$

$$i(t) = I_O e^{-t/\tau}$$

$$v_R(t) = RI_O e^{-t/\tau}$$

กำลังไฟฟ้า

$$P(t) = i^2(t)R = RI_O^2 e^{-2t/\tau}$$

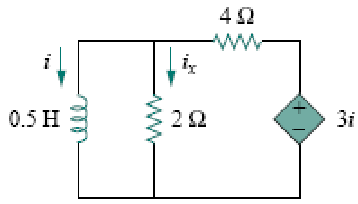
พลังงานสะสมในตัวเหนี่ยวนำ

$$W_E(t) = \int_0^t P(t)dt = \frac{1}{2} L I_O^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right)$$

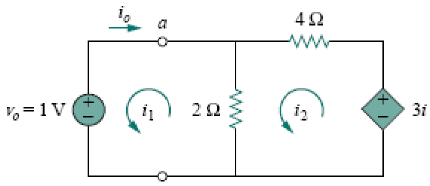
สิ่งที่ต้องการเพื่อที่จะหาคำตอบ หลักๆ มีสองตัวที่สำคัญ คือ

- ค่ากระแสที่สถานะเริ่มต้นที่เวลา 0, I_O ที่ผ่านตัวเหนี่ยวนำ
- ค่าเวลาคงที่ของวงจร $\tau = L/R$

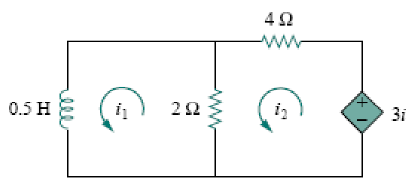
ตัวอย่าง จงหาค่า i(t), i_X(t) เมื่อค่ากระแสที่ผ่านตัวเหนี่ยวนำที่เวลา t = 0, i(0) = 10 A



สิ่งที่ต้องการหาอีกค่าคือ R_{TH} ที่ตกคร่อมที่จุดปลายของตัวเหนี่ยวนำ กรณีของการหาค่า R_{TH} ของวงจรที่มีแหล่งจ่ายที่ไม่อิสระนั้นจะต้องมีการสมมติว่ามีแหล่งจ่ายแรงดัน 1 โวลต์ ต่อขนานเข้าไปแทนที่ตัวเหนี่ยวนำ แล้วคำนวณหาค่าความต้านทานจาก กฎของโอห์มตามรูป (a)



(a)



(b)

Loop1 $2(i_1 - i_2) + 1 = 0$

Loop2 $6i_2 - 2i_1 - 3i_1 = 0$

แก้สมการ หา i_1 แล้วหาค่า R_{TH} จาก 1 volts หารด้วยกระแส i_1

หรือใช้ KVL กับ (b) $V_L = L\dfrac{di}{dt}$ แล้วแก้สมการ differential equation โดยการอินทิเกรตจาก เวลาจุดเริ่มต้นถึงเวลาเป็น t ใดๆ (ลักษณะของขั้วตัวเหนี่ยวนำจะมีการพิจารณาเหมือนเป็น passive element ทิศทางของกระแสจะพุ่งเข้าในทิศทางขั้วบวกของตัวเหนี่ยวนำ)

Loop1 $\dfrac{1}{2}\dfrac{di_1}{dt} + 2i_1 - 2i_2 = 0$

Loop2 $6i_2 - 5i_1 = 0$

แทน i_2 จากลูป 2 ลงในสมการของลูป 1 จะได้

$$\frac{di_1}{i_1} = -\frac{2}{3}dt$$ อินทิเกรตจาก time = 0 – t จะได้

$$\ln i_1\Big|_0^t = -\frac{2}{3}t$$

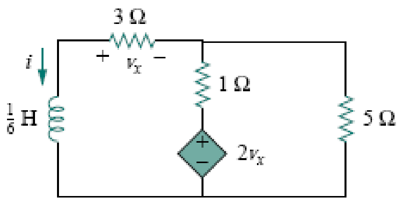
$$i_1(t) = 10e^{-2t/3}$$

หาค่า แรงดันที่ตกคร่อม ตัวเหนี่ยวนำ

$$V_L = 0.5\frac{d\left(10e^{-2t/3}\right)}{dt} = -\frac{10}{3}e^{-2t/3}$$ ดังนั้น

$$i_x = V_L / 2 = -1.6667e^{-2t/3} \text{ A}$$

หรือหาจาก ผลต่างของกระแสลูปก็ได้



Example From the circuit at the left hand side, i(0) = 5 A. Determine i(t) and $v_x(t)$ when t > 0.

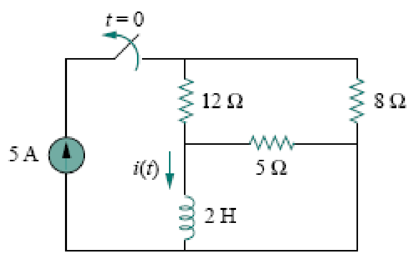
Referring to the above example ....

(Answers: $5e^{-53t}, -15e^{-53t}$)

โดยปกติในสภาวะของตัวเหนี่ยวนำในวงจรไฟฟ้ากระแสตรง หรือในสถานะที่ไม่ได้อยู่ใกล้กับเวลาที่มีการเปลี่ยนแปลงของวงจร ตัวนำจะมีสถานะเป็นปิดวงจร

Example The circuit at the right hand side start at t = 0. Find i(t) when time > 0.

At time = 0, the inductor is shorted circuit, then, R 5 Ohms is also short circuit. i(t=0) can be calculated by current divider.



$$i(0) = 5\frac{8\times 12}{8+12}\times\frac{1}{12} = 2 \text{ A}$$

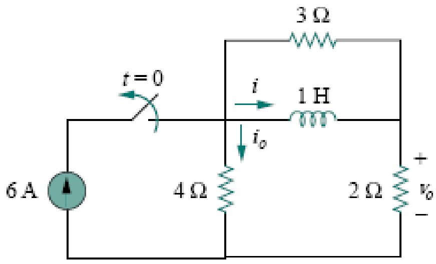
When time t > 0, the total resistance can be fined

$$R_{TH} = R = (12+8)//5 = 4 \text{ Ohms}$$

$\tau = L/R = 2/4 = 0.5$, therefore,

$$i(t) = 2e^{-2t} \text{ A for } t > 0$$

Example For the following circuit, determine i, i_o and v_o at all time (including time = 0 and greater than 0). Assume the switch was closed for long time enough.



At time = 0

The inductor is shorted circuit and then the resistance of 3 Ohms is automatically removed from the circuit. Therefore, from current divider,

$$i(0) = 6\frac{4\times 2}{4+2}\times\frac{1}{2} = 4 \text{ A}$$

$$i_0(0) = 2 \text{ A}$$

$$v_O(0) = 2\times 2 \text{ Volts}$$

At time > 0 when the switch is opened; consider at the inductor. Resistance circuit consists of 3//(4+2) = 2 Ohms. Therefore

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 4e^{-2t} \text{ A}$$

The voltage across the inductor terminals is

$$v_L(t) = (1)\frac{d\left(4e^{-2t}\right)}{dt} = -8e^{-2t} \text{ V}$$

$$i_O(t) = \frac{v_L(t)}{6} = -\frac{4}{3}e^{-2t} \text{ A}$$

$$v_O = -i_O(t)(2) = \frac{8}{3}e^{-2t}$$

Plot the answers on the graph as function of time.

5.6 Step responses ในวงจร RC

มีการเพิ่ม แหล่งจ่ายไฟกระแสตรงเข้ามาในวงจรโดย switch ที่ทำหน้าที่เป็น unit step function ดังแสดงในรูปซ้ายมือ จากรูป (b) ใช้ KCL วิเคราะห์วงจร

$$i_C + \frac{v - V_S u(t)}{R} = 0$$

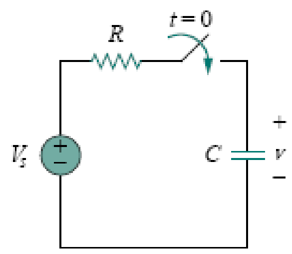
ที่เวลามากกว่า 0

$$C\frac{dv}{dt} = -\frac{v - V_S}{R}$$

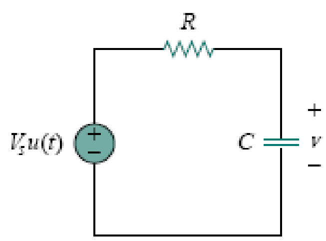
$$\frac{dv}{v - V_S} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrate both sides $\ln\left(v - V_S\right)\Big|_{V_O}^{v(t)} = -\frac{t}{RC}\Big|_0^t$

$$v(t) = (V_O - V_S)e^{-t/RC} + V_S \text{ for } t > 0$$



(a)



(b)

หรือมีอีกวิธีที่ง่ายกว่าแก้สมการ Differential equation ข้างต้น สังเกตว่าในคำตอบนั้นจะประกอบด้วย สองส่วน ที่สามารถแยกวิเคราะห์ได้เป็น

$$v = v_n + v_f$$

โดยที่ v_n เป็นผลกระทบโดยปกติในกรณีที่ไม่มีแหล่งจ่ายดังที่ได้กล่าวมาแล้ว $v_n = \left(V_O - V_S\right)e^{-t/RC}$ ส่วน v_f เป็นค่าผลกระทบที่ได้เมื่อเวลาผ่านไปนานพอสมควร (Steady –state response) ดังนั้น

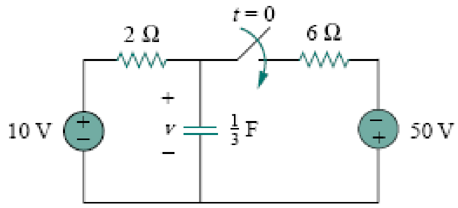
$$v(t) = v(\infty) + \left(V_O - v(\infty)\right)e^{-t/RC}$$

ในขั้นตอนของการหาแรงดันคร่อมตัวเก็บประจุไฟฟ้า นั้นต้องการ สาม ค่าจากการวิเคราะห์วงจรคือ

1. ค่าแรงดันคร่อมตัวต้านทานที่จุดเวลาเริ่มต้น $V_O = v(0)$
2. ค่าแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุที่เวลาผ่านไปนานมากๆ หรือ สภาวะ Steady-state $v(\infty)$
3. ค่าความต้านทานเทียบเคียงที่มองขั้วของตัวเก็บประจุใช้หลักการเดียวกับการหาค่า R_{TH} ดังนั้น จึงเห็นบางทีเขาใช้ที่สัญลักษณ์เดียวกัน เพื่อที่จะคำนวณหาค่าคงที่เวลา Time constant (τ)

หมายเหตุ: จะต้องอาศัยความชำนาญ ความรอบคอบ และ ประสบการณ์อย่างมาก จึงแนะนำให้พยายามทำโจทย์ให้มากๆ

Example For the circuit on the right hand side, find v(t) at t > 0. Assume that the switch has been opened for a long time enough. The switch is closed at t = 0. Then, calculate the voltage across the capacitor at t = 0.5 s.



v(0-) = 10 V

จำไว้ว่า ที่สภาวะคงที่กับไฟฟ้ากระแสตรง ตัวเก็บประจุจะตอบสนองด้วยการเปิดวงจร

<u>วิธีที่ 1</u> พิจารณาวิเคราะห์วงจรที่เวลามากกว่า 0 โดยใช้ KCL (for capacitor, normally)

$$(1/3)\frac{dv}{dt} + \frac{v-10}{2} + \frac{v+50}{6} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -2(v+5)$$

$$\frac{dv}{(v+5)} = -2dt$$

$$\ln(v+5)\Big|_{10}^{v(t)} = -2t$$

$$v(t) = -5 + 15e^{-2t}$$

v(t) = 0.518 Volts

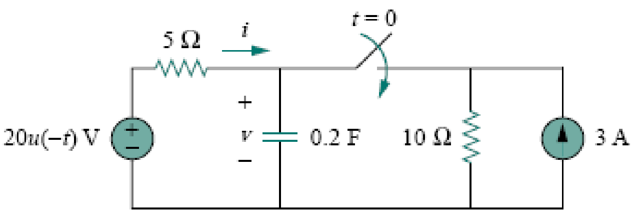
วิธีที่ 2

v(0-) = 10 V

$v(\infty) = -\dfrac{10+60}{8} \times 2 + 10 = -5$ V

R_{TH} = 2//6 = 1.5 Ohms $\quad \tau = 1.5 \times 1/3 = 0.5$

$$v(t) = v(\infty) + (V_O - v(\infty))e^{-t/RC} = -5 + (10-(-5))e^{-2t}$$
$$= -5 + 15e^{-2t}$$



Example For the circuit at left hand side, find i(t) and v(t) when the switch is closed at t = 0.

วิธีที่ 2

- v(0-) = 20 V (capacitor is opened at this moment)
- $v(\infty) = 3\dfrac{10}{3} = 10$ V

- R = 5//10 = 10/3 Ohms, $\tau = 0.2 \times 10/3$

$$v(t) = 10 + (20-10)e^{-1.5t} \quad t > 0$$

Therefore,

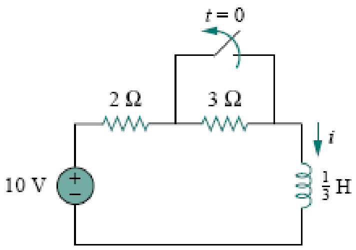
$$v(t) = \begin{cases} 20 & for\, t < 0 \\ 10(1 - e^{-1.5t}) & for\, t > 0 \end{cases}$$

i = 0 at t < 0

i(t) =- v(t)/5 = $-2(1-e^{-1.5t})$ for t > 0

5.7 Step responses ในวงจร RL

วิเคราะห์ในทำนองเดียวกัน แต่จะเป็นการวิเคราะห์วงจรด้วย Mesh analysis ดูตัวอย่างประกอบคำอธิบาย



Example For the circuit on the left hand side, the switch is open at time > 0.

Determine i(t) for all time.

วิธีที่ 1

หาค่า i(0) โดยที่สมมติว่า สวิตซ์ถูกปิดนานพอก่อนที่จะเปิด ตามที่กล่าวมาแล้วว่า ในสภาวะการคงตัวนั้น ตัวเหนี่ยวนำจะทำตัวเป็นปิดวงจร ดังนั้น

$$i(0) = 10/2 = 5 \text{ A}$$

เมื่อ time > 0 ใช้ KVL

$$5i + \frac{1}{3}\frac{di}{dt} = 10$$

$$\frac{di}{i-2} = -15$$

$$\ln(i-2)\Big|_{5}^{i(t)} = -15t$$

$$i(t) = 2 + 3e^{-15t} \text{ A}$$

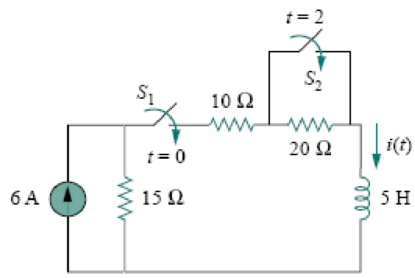
วิธีที่ 2

- i(0) = 5 A
- $i(\infty) = 10/5 = 2$ A
- R = 2+3 = 5, $\tau = L/R = 1/3/5 = 1/15$

$$i(t) = i(\infty) + (i(0) - i(\infty))e^{-t/\tau} \text{ A}$$
$$= 2 + 3e^{-15t}$$

ในกรณีตัวอย่างที่มีเงื่อนไขของการเปิดหรือปิดสวิตซ์มากกว่า 1 ขั้นตอนดังตัวอย่างที่จะกล่าวต่อไป จะต้องมีการแบ่งการพิจารณาเป็นทีละขั้นตอนตามลำดับ เพราะค่าเริ่มต้นของขั้นตอนต่อไปจะเอาสถานะ ณ หลังจากขั้นตอนก่อนหน้าที่ผ่านมาได้ทำงานผ่านไปแล้ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

Example Find i at all times. The switch is S_1 is closed at t = 0 and S_2 is closed at t = 2. Calculate i(1) and i(3).



ที่ สวิตซ์ S_1

- i(0-) = 0 A
- $i(\infty) = 6(15//(20+10))/30 = 2$
- R = 45 Ohms, $\tau = 5/45$

$$i(t) = 2 - 2e^{-9t} \quad \text{for } 0 < t < 2$$

ที่ สวิตซ์ S_2

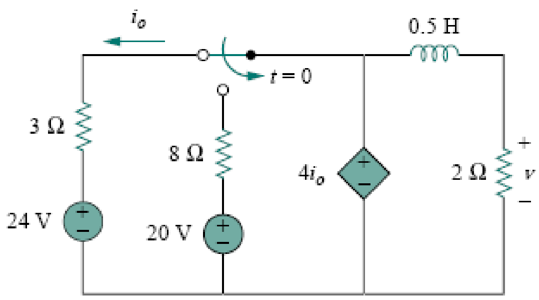
- i(2-) = $2(1-e^{-9(2)})$ = 2 A เป็นสถานะก่อนที่สวิตซ์ 2 จะปิด ใช้เป็นสถานะเริ่มต้นของขั้นการพิจารณาที่ 2

- $i(\infty) = 6(15//10)/10 = 3.6$ A
- R = 25 Ohms, $\tau = L/R = 5/25$

$$i(t) = 3.6 + (2-3.6)e^{-5(t-2)} \text{ for t > 2}$$

$$i(t) = \begin{cases} 0 & for \quad t<0 \\ 2(1-e^{-9t}) & for \quad 0<t<2 \\ 3.6-1.6e^{-5(t-2)} & for \quad t>2 \end{cases}$$

Example For the following circuit, switch is turned to another terminal at time = 0. Determine v(t) and i_O(t).



ใช้วิธีการพิจารณาแบบที่ 2 โดยพิจารณาที่กระแสที่ตัวเหนี่ยวนำแล้วค่อยหาคำตอบที่โจทย์ถาม

- $i_L(0)$ ที่เวลา t = 0 ต้องใช้การวิเคราะห์ KVL (ตัวเหนี่ยวนำอยู่ในสภาวะปิดวงจร

Loop 1

$$-4i_O + 3i_O + 24 = 0$$
$$i_O = 24$$

Loop 2

$$-4i_O + 2i_L = 0$$
$$i_L(0) = 48$$

v(0) = 96 V

- $i_L(\infty) = 20/(8+2) = 2$ A จากสภาวะคงตัวหลังจาก สวิตซ์สับไปนานมากๆ
- R_{TH} = 2+8 = 10 Ohms, $\tau = L/R = 0.5/10 = 1/20$

$$i_L(t) = i(\infty) + (i_L(0) - i(\infty))e^{-t/\tau}$$
$$= 2 + (48-2)e^{-20t}$$
$$= 2 + 46e^{-20t}$$

ค่าแรงดันไฟฟ้าที่ v ที่ t > 0: v(t) = i_LxR

$$v(t) = \begin{cases} 96 & for\, t=0 \\ 4+92e^{-20t} & for\, t>0 \end{cases}$$

$$i_O = \begin{cases} 24 & for \quad t=0 \\ 0 & for \quad t>0 \end{cases}$$

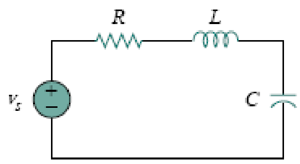
5.8 บทนำ second order circuits

โดยลักษณะทางกายภาพแล้ว Second order circuits คือวงจรที่ประกอบด้วย ตัวสะสมพลังงานสองตัวทำให้ได้สมการอนุพันธ์ อันดับ 2 ซึ่งเป็นวงจร อนุกรม RLC, ขนาน RLC, RL and RC ดังรูปที่แสดงด้านล่าง

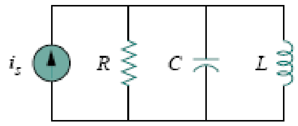
การหาค่าเริ่มต้นและค่าที่สภาวะคงที่ เป็นสิ่งที่จำเป็นอย่างมากสำหรับการวิเคราะห์ Second order circuits ในการวิเคราะห์จะค่อนข้างยากซึ่งที่ควรต้องพิจารณาอย่างรอบคอบคือ

- ขั้วบวก-ลบของตัวเก็บประจุและทิศทางของกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ ต้องมีความแม่นยำในการวิเคราะห์
- และจำไว้ว่า ค่าความต่างศักย์คร่อมตัวเก็บประจุมีความต่อเนื่อง

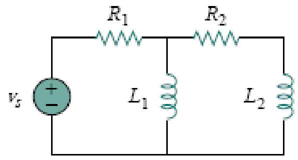
$$v(0^-) = v(0^+)$$



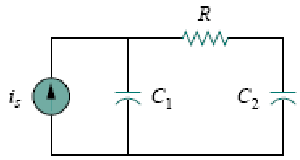
(a)



(b)



(c)



(d)

และกระแสที่ไหลในตัวเหนี่ยวนำก็มีความต่อเนื่องด้วย

$$i(0^-) = i(0^+)$$

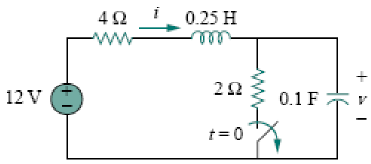
เวลาที่ t = 0^- หมายความว่าเวลาก่อนที่จะมีการเปิดหรือปิดสวิตซ์ ส่วน t = 0^+ เป็นจุดหลังจากที่มีการเปิดปิดสวิตซ์ ส่วนขั้นตอนที่กระทำการสับสวิตซ์ คือที่ขณะเวลา t = 0

ในการหาค่าที่จุดเริ่มต้นจะเป็นการวิเคราะห์วงจรเมื่อสภาวะที่พิจารณานั้นถูกสมมติว่าเป็นสถานะที่คงตัวมีช่วงเวลาที่นานพอ ตัวเหนี่ยวนำจะเป็น Short circuit และตัวเก็บประจุจะถูกพิจารณาเป็น open circuit

ในการพิจารณาจะเริ่มจากสถานะก่อนเริ่มต้นด้วยหลักการวิเคราะห์วงจรที่ได้ศึกษามาทั้งหมดรวมด้วยทฤษฎีการวิเคราะห์วงจรต่างๆ (*ตัวเหนี่ยวนำจะเป็น Short circuit และตัวเก็บประจุจะถูกพิจารณาเป็น open circuit*) ซึ่งค่าที่ได้ทั้งหมดจะถูกใช้เป็นค่าเริ่มของการวิเคราะห์วงจรอีกครั้งจากวงจรต่อเนื่องหลังจากที่มีการทำงานของสวิตซ์หรือการเปลี่ยนแปลงวงจรแล้ว และค่าหนึ่งเป็นค่าที่ต้องคำนวณหาอีกคือค่าที่มีการเปลี่ยนแปลงเข้าสู่สถานะคงที่เป็นค่าสุดท้าย (*ตัวเหนี่ยวนำจะเป็น Short circuit และตัวเก็บประจุจะถูกพิจารณาเป็น open circuit*) ซึ่งค่าต่างเหล่านี้จะถูกนำไปใช้ในการร่วมแก้ปัญหาของสมการอนุพันธ์อันดับสองต่อไป

ดังนั้น ในการวิเคราะห์วงจรจึงคิดเป็นสามขั้นตอนลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ประกอบ

ตัวอย่าง จากวงจร สวิตซ์เปิดวงจรที่เวลา t = 0 จงหาค่า (a) i(0^-), v(0^-) (b) d(i^+)/dt, d(v^+)/dt, (c) $i(\infty), v(\infty)$

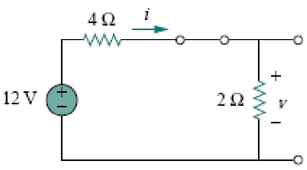


จากวงจรในการสับสวิตซ์แบ่งเป็นสามขั้นตอนการคำนวณดังรูป

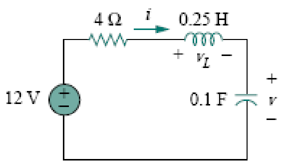
จากรูป (a) ตัวเหนี่ยวนำจะเป็นสถานะที่สภาวะคงตัว short-circuit และตัวเก็บประจุ open-circuit ที่เวลา 0^- ดังนั้น

$$i(0^-) = 12/(4+2) = 2 \text{ A}$$ ที่ตัวเหนี่ยวนำ

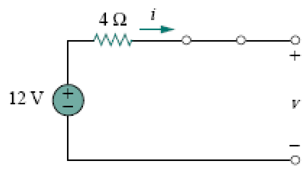
$v(0^-) = 2 \times i(0^-) = 4$ V เป็นแรงดันไฟฟ้าที่คร่อมความต้านทาน 2 Ohms เท่ากับแรงดันไฟฟ้าคร่อมตัวเก็บประจุ



(a)



(b)



(c)

จากรูป (b)

ที่ inductor $v_L = L\dfrac{di}{dt}$ จากการวิเคราะห์วงจร KVL ซึ่งจะพิจารณาต่อเนื่องจาก กระแสของ inductor และแรงดันไฟฟ้าคร่อม capacitor จะต่อเนื่อง $\left(i_L(0^-) = i_L(0^+), v_C(0^-) = v_C(0^+)\right)$ จะได้ i = 2 A และ v = 4

$$-12 + 8 + v_L + 4 = 0$$

$V_L = 0$ V $\qquad \dfrac{di}{dt} = 0/0.25 = 0$ A/s

ที่ capacitor $i_C = c\dfrac{dv}{dt} = 2$ A จากวงจรที่ต่อกันแบบอนุกรม

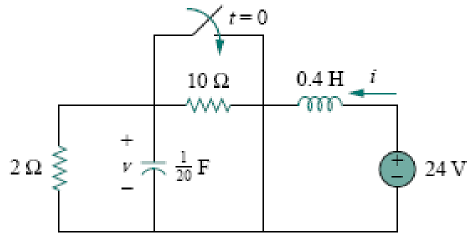
$$\frac{dv}{dt} = 2/0.1 = 20 \text{ V/s}$$

จากรูป (c) เป็นสถานะคงตัวหลังจากที่สวิตซ์เปิดเป็นเวลานาน

$$i(\infty) = 0A, v(\infty) = 12V$$

Example From the circuit on the left hand side, switch is closed at time = 0. Determine (a) $i(0^-)$, $v(0^-)$ (b) $d(i^+)/dt$, $d(v^+)/dt$, (c) $i(\infty), v(\infty)$

(สายไฟที่ขนานกับ source หลัง inductor ไม่มี)



(a) At this time, the inductor is shorted-circuit and the capacitor is opened-circuit.

$$i(0^-) = 24/(10+2) = 2 \text{ A}$$

$$v(0^-) = 2 \times 2 = 4 \text{ V}$$

(b) At this time switch is closed, inductor current and capacitor voltage are constant. Therefore inductor voltage is calculated from KVL.

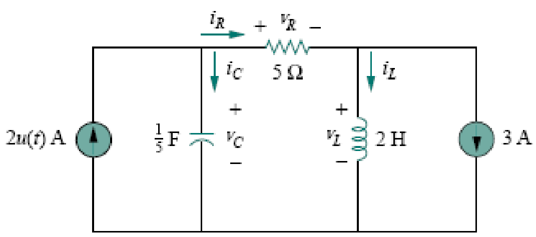
$$v_L = 24 - 2\times 2 = 20 \text{ V}$$

$$\frac{di}{dt} = 20/L = 20/0.4 = 50 \text{ A/s}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0/C = 0 \text{ V/s}$$

(c) $i(\infty) = 24/2 = 12$ A $\qquad v(\infty) = 24$ V

Example Form the following circuit, voltage source is a step function (start from t = 0).



Find (a) $i_L(0^+), v_C(0^+), v_R(0^+)$

$i_L(0^+) = -3$ A, $v_C(0^+) = 0$ V, $v_R(0^+) = 0$ V

(b) $di_L(0^+)/dt, dv_C(0^+)/dt, dv_R(0^+)/dt$

Analyse by KCL;

$i_R(0^+) = -3 + 3 = 0$ A, thus $i_C(0^+) = 2$ A

$di_L(0^+)/dt = v_L/L = 0$ A/s

$$i_C(0^+) = Cdv_C(0^+)/dt = 2$$

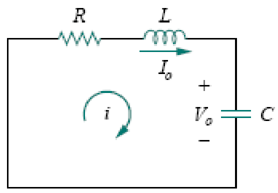
$$dv_C(0^+)/dt = 10 \text{ V/s}$$

$v_R(0^+) = 0$ Volts : the current in the resistance is 0

(c) $i_L(\infty) = -3 + 2 = -1$ A $\; v_C(\infty) = v_R(\infty) = 10$ V (the capacitor is opened and the inductor is shorted-circuit)

5.9 วงจร Second order RLC ที่ไม่มีแหล่งจ่ายไฟ

จากวงจร RLC ข้างล่างใช้ KVL จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้



$$iR + Ldi/dt + \int_{-\infty}^{t} \frac{i}{c} dt = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

จากสถานะเริ่มต้น t = 0

$$Ri(0) + Ldi(0)/dt + v_C(0) = 0$$

จากบทที่ผ่านมา คำตอบของ วงจร First order คือ $i = Ae^{st}$ แทนค่ากระแสนี้ในสมการ second-order ข้างต้น

$$As^2 e^{st} + \frac{R}{L} Ase^{st} + \frac{A}{LC} e^{st} = 0$$

$$Ae^{st}\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

หาคำตอบ

$$s = \frac{-R/L \pm \sqrt{(R/L)^2 - 4(1)/(LC)}}{2(1)} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ดังนั้น

$$s^2 + 2\alpha s + \omega^2 = 0$$

จากคำตอบของสมการมี สองคำตอบ ดังนั้น จะได้คำคอบของกระแสเป็นสองคำตอบเช่นกัน

$$i_1 = A_1 e^{s_1 t}, i_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

คำตอบของสมการของ วงจร second-order เป็น

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

ในการหาค่าคงที่ A_1 and A_2 จากเงื่อนไขเบื้องต้น i(0) and di(0)/dt อย่างไรก็ตามในการหาคำตอบของสมการอันดับสองนั้นจะถูกแบ่งเป็นสามกรณี

1. ถ้า $\alpha > \omega_0$ จะเป็น overdamped
2. ถ้า $\alpha = \omega_0$ จะเป็น critically damped
3. ถ้า $\alpha < \omega_0$ จะเป็น underdamped

Overdamoed case $\alpha > \omega_0$

จะได้ s_1 และ s_2 เป็นจำนวนจริงลบ ดังนั้น คำตอบของสมการเป็น

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

ค่ากระแสจะมีค่าเข้าสู่ศูนย์เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น

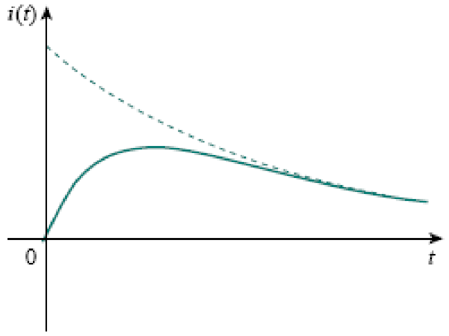
Critically damped case $\alpha = \omega_0$

เมื่อค่าทั้งสองเท่ากัน ดังนั้น

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha\frac{di}{dt} + \omega_0^2 = \frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha\frac{di}{dt} + \alpha^2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt} + \alpha i\right) + \alpha\left(\frac{di}{dt} + \alpha i\right) = 0$$

กำหนดให้ $f = \dfrac{di}{dt} + \alpha i$ คำตอบของสมการเมื่อแทนฟังก์ชัน f



(a)

$$\frac{df}{dt} + \alpha f = 0$$

$$f = A_1 e^{-\alpha t}$$

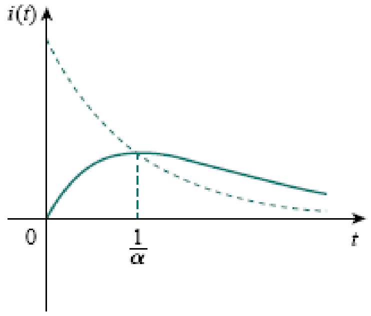
ดังนั้น

$$A_1 e^{-\alpha t} = \frac{di}{dt} + \alpha i$$

จัดรูปใหม่ และเป็น diff ผลคูณ

$$A_1 = e^{\alpha t}\frac{di}{dt} + e^{\alpha t}\alpha i$$

$$\frac{d\left(ie^{\alpha t}\right)}{dt} = A_1$$



(b)

อินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$ie^{\alpha t} = A_1 t + A_2$$

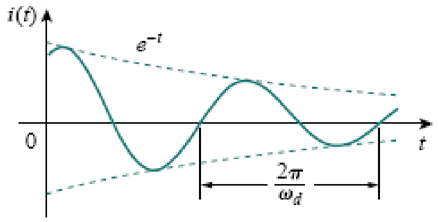
$$i(t) = A_1 t e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}$$

Underdamped case $\alpha < \omega_0$

ในกรณีนี้ ค่าที่อยู่ในรากที่สองจะเป็นลบ ดังนั้น

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + j\omega_d$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - j\omega_d$$



โดยที่ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ คือ damping frequency

ดังนั้น

$$i(t) = A_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + A_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t}$$

จาก Euler's identities

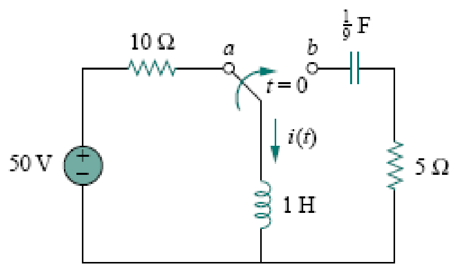
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta, e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

จึงได้สมการกระแสเป็น

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)$$

โดยที่ $B_1 = A_1 + A_2$ และ $B_2 = j(A_1 + A_2)$

ตัวอย่าง จากวงจรซ้ายมือ สวิตซ์จะเปิดวงจรที่เวลา t = 0 จงหาค่า กระแสที่ไหลในวงจรอนุกรม RLC หลังจากที่แหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าปลดออก



ที่เวลา t = 0

$i(0) = 50/10 = 5$ A, $v_C(0) = 0$ V

$di(0)/dt = v_L/L = 0$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 2.5 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3$$

เป็นกรณี Underdamped .ซึ่งจะได้

$$s_1 = -2.5 + j\sqrt{3^2 - 2.5^2} = -2.5 + j1.66$$

$$s_2 = -2.5 - j1.66$$

ดังนั้น จะได้สมการของกระแสเป็น

$$i(t) = e^{-2.5t}\left(A_1 \cos(1.66t) + A_2 \sin(1.66t)\right)$$

จะทำการพิจารณาที่เงื่อนไขเริ่มต้นเพื่อที่จะหาค่าคงที่ จาก i(0) = 5 A

$$5 = e^{-2.5(0)}\left(A_1 \cos(1.66(0)) + A_2 \sin(1.66(0))\right)$$

$$A_1 = 5$$

และจาก di(0)/dt = 0 และจาก KVL (ทิศทางของกระแสจะไหลเข้าที่ขั้วบวกของ inductor และจากความต่อเนื่องของกระแสใน inductor และความต่อเนื่องของแรงดันไฟฟ้าของ capacitor)

กะ

$$-12.5 + 1.66A_2 = -25$$

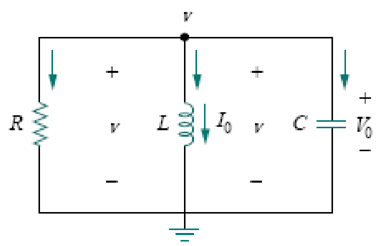
$$A_2 = -12.5/1.66 = -7.53$$

ดังนั้น

$$i(t) = e^{-2.5t}(5\cos 1.66t - 7.53\sin 1.66t) \text{ A}$$

5.10 วงจรขนาน RLC Second order ที่ไม่มีแหล่งจ่ายไฟฟ้า

ตัวอย่างของวงจรขนาน RLC ไม่มีแหล่งจ่ายแสดงอยู่ที่ขวามือ ใช้การวิเคราะห์วงจร KCL



$$\frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v dt = 0$$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา

$$\frac{1}{CR}\frac{dv}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{LC}v = 0$$

เป็นสมการอันดับสองซึ่งมีวิธีการหาคำตอบเช่นเดียวกับที่แสดงในส่วนที่ผ่านมา

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

แก้สมการได้เป็น

$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - (1)\left(\frac{1}{LC}\right)} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

เช่นเดียวกับกรณีที่พิจารณาแล้ว โดยที่ $\alpha = 1/(2RC), \omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$ และแยกการพิจารณาเป็นกรณี

Overdamoed case $\alpha > \omega_0$

จะได้รูปแบบของคำตอบเป็น

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Critically damped case $\alpha = \omega_0$

ในกรณี $L = 4R^2C$ และรูปทั่วไปของคำตอบเป็น

$$v(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t}$$

Underdamped case $\alpha < \omega_0$

จะได้จำนวนเชิงซ้อนเป็นค่าของ s ซึ่งจะได้คำตอบทั่วไปเป็นตรีโกณมิติ

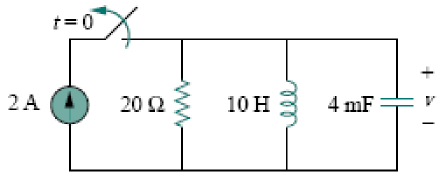
$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

ในการหาค่าคงที่ นั้นหาได้จาก เงื่อนไขเริ่มต้น คือ v(0) และ dv(0)/dt

$$\frac{V_0}{R} + I_0 + C\frac{dv(0)}{dt} = 0$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{(V_0 + RI_0)}{RC}$$

Example Determine v(t) in the following circuit when the switch is opened at t = 0.



v(0) = V_0 = 0 V (capacitor shorted by the inductor)2

I(0) = 2 A (Inductor)

Classify into three damping cases:

$\alpha = 1/(2RC) = 1000/160 = 6.25 > \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 5$ เป็น Overdamped case and:

$$s_1, s_2 = -6.25 \pm \sqrt{6.25^2 - 5^2} = -2.5, -10$$

The general answer form:

$$v(t) = A_1 e^{-2.5t} + A_2 e^{-10t}$$

From the first initial condition:

$$v(0) = 0 = A_1 + A_2 \qquad (1)$$

And another condition:

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{-(V_0 + RI_0)}{RC} = -500 = -2.5A_1 - 10A_2 \qquad (2)$$

From (1) and (2) we obtain:

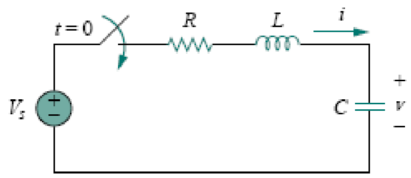
$$A_2 = -A_1 = 500/7.5 = 66.67$$

The answer is

$$v(t) = 66.67(e^{-10t} - e^{-2.5t}) \text{ V}$$

5.11 วงจร Second order RCL กับแหล่งจ่ายที่เป็น Step function

วงจรอนุกรมทางด้านซ้ายมือจาก



$$L\frac{di}{dt} + iR + v_C = V_S \text{ และ}$$

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

ดังนั้น เราจะได้สมการอันดับสองของ v_C เป็น

$$\frac{d^2v}{dt} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_S}{RC}$$

คำตอบของสมการที่มีแหล่งจ่ายมาพร้อมสามารถแยกออกเป็นสองส่วนคือ

$$v(t) = v_n(t) + v_f(t)$$

ส่วนแรกจะมีชื่อว่า natural response จะหาได้จากกรณีที่ให้แหล่งจ่ายมีค่าเป็น 0 ซึ่งก็สามารถหาได้จากส่วนที่ได้กล่าวมาแล้ว เป็น

Overdamoed case $\alpha > \omega_0$

$$v_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Critically damped case $\alpha = \omega_0$

$$v_n(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t}$$

Underdamped case $\alpha < \omega_0$

$$v_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

ส่วนที่สองเป็นคำตอบที่ได้จากกรณีที่เป็นเงื่อนไขสุดท้ายคือ

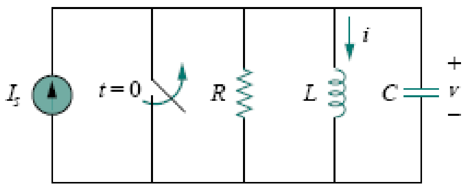
$$v_f(t) = v_f(\infty) = V_S$$

และคำตอบของ v(t) จะได้เป็น

$$v(t) = V_S + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{Overdamped case}$$

$$v(t) = V_S + A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t} \quad \text{Critically damped case}$$

$$v(t) = V_S + e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad \text{Underdamped case}$$



วงจรขนาน RLC กับแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้า จากวงจรขวามือ ใช้ KCL ในการวิเคราะห์วงจร

$$C\frac{dv}{dt} + i + \frac{v}{R} = I_S \quad \text{และ} \quad v = L\frac{di}{dt}$$

จะได้สมการอันดับสองเป็น

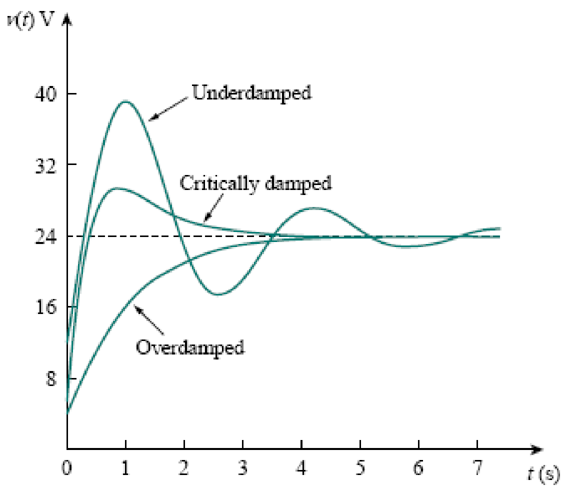
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_S}{LC}$$

ใช้หลักการแก้ปัญหาเช่นเดียวกับวงจรข้างต้นได้คำตอบในรูปทั่วไปเป็น

$$i(t) = I_S + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{Overdamped case}$$

$$i(t) = I_S + A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t} \quad \text{Critically damped case}$$

$$i(t) = I_S + e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad \text{Underdamped case}$$

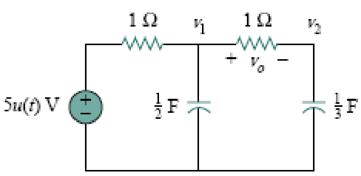


ตัวอย่างของ กราฟที่แสดงคำตอบที่คเป็นผลของการตอบสนองของวงจรอันดับสองจากแหล่งจ่ายในลักษณะ Step function

5.12 วงจรอันดับสองทั่วไป

มีความสอดคล้องกับการพิจารณาจากวงจรอันดับสองข้างต้น ด้วยขั้นตอนที่คล้ายคลึงกันดังตัวอย่างข้างล่าง

Example Find $v_0(t)$



The initial conditions of this circuit at time = 0:

$$v_1(0^-) = v_2(0^-) = 0 = v_1(0+) = v_2(0^+)$$

$$v_0(0^+) = v_1(0^+) - v_2(0^+) = 0$$

Analyse circuit at time = 0^+;

Apply KCL to calculate at the capacitor 1

$$\frac{v_1(0^+)-5}{1}+I_{C1}(0^+)+v_1\left(0^+\right)-v_2(0^+)=0 \qquad C_1\frac{dv_1\left(0^+\right)}{dt}=I_{C1}(0^+)$$

$$\frac{dv_1(0)}{dt}=10$$

At time = ∞ ;

$$v_1(\infty)=v_2(\infty)=5$$

Using node analysis to generate the general form for the general answer

At node v_1 :

$$\frac{v_1-5}{1}+\frac{1}{2}\frac{dv_1}{dt}+\frac{v_1-v_2}{1}=0 \qquad (1)$$

At node v_2 :

$$v_2-v_1+C_2\frac{dv_2}{dt}=0$$

$$v_1=v_2+\frac{1}{3}\frac{dv_2}{dt} \qquad (2)$$

$$\frac{dv_1}{dt}=\frac{dv_2}{dt}+\frac{1}{3}\frac{d^2v_2}{dt^2}$$

Substitute v_1 into (1)

$$\frac{d^2v_2}{dt^2}+7\frac{dv_2}{dt}+6v_2=0$$

$$s_1,s_2=-1,-6$$

The general answer form

$$v_{2n}(t)=A_1^{-t}+A_2e^{-6t}$$

From the final condition the other answer is

$$v_{2f}=v_2(\infty)=5$$

Therefore,

$$v_2(t)=5+A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}$$

Find the constant values:

$$v_2(0^+)=0=5+A_1+A_2 \qquad (3)$$

$$\frac{dv_2(0^+)}{dt}=0=-A_1-6A_2 \qquad (4)$$

From (3) and (4) then,

$$A_1=-6, A_2=1$$

We obtain

$$v_2(t)=5-6e^{-t}+e^{-6t}$$

From (2)

$$v_1(t)=v_2(t)+\frac{1}{3}\frac{dv_2}{dt}$$
$$=5-4e^{-t}-e^{-6t}$$

Finally we obtain

$$\begin{aligned} v_0(t) &= v_1(t) - v_2(t) \\ &= 2(e^{-t} - e^{-6t}) \end{aligned} \quad \text{V}$$

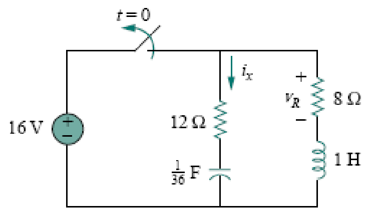
จากตัวอย่าง สามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1 หาค่าเริ่มต้นที่เกี่ยวข้องทั้งหมด (Initial conditions) ซึ่งใช้การวิเคราะห์วงจรที่มีได้อย่างเหมาะสมขึ้นอยู่กับประสบการณ์การทำโจทย์ รวมทั้งอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่เวลา time 0^-

2. วิเคราะห์วงจรที่สถานะ time = 0^+ จะได้สมการอันดับสองเพื่อให้ได้คำตอบของสมการในรูปทั่วไป (Natural response) โดยจะต้องปลดแหล่งจ่ายไฟฟ้าอิสระออก (voltage source: OS, current source: OC) ซึ่งจะแยกตาม Damping cases ทั้งสามที่ได้กล่าวมาแล้ว

3. คำนวณค่าที่ต้องการที่สภาวะคงตัวหลังจาก time = 0^+ ซึ่งเป็น $v(\infty), i(\infty)$ (forced response: SC-inductor and OC-capacitor)

4. คำนวณหาค่าคงที่ในคำตอบของสมการอันดับสองด้วย ค่าที่ได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นทั้งหมดที่เกี่ยวข้องรวมของอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วย



Example Find v_R and i_x for t > 0. The switch is closed for a long time before t = 0 but is opened at t = 0.

Initial conditions:

$v_C(0^-) = 16$ V, $\quad i_L(0^-) = 16/8 = 2$ A

From the first-order differential equation: by KCL

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = -i_L(0)/C = -72$$

KVL after time = 0

$$L\frac{di(0)}{dt} - v_C(0) + 20i(0) = 0$$

$$\frac{di(0)}{dt} = -24$$

$$v_C(\infty) = 0, i_L(\infty) = 0$$

Find the second-order equation of the circuit: by KCL after the switch is opened.

$$20i + \frac{di}{dt} + v_C = 0$$

Take differentiation with above equation:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 20\frac{di}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = 0$$

From $i_C = C\dfrac{dv_C}{dt}$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 20\frac{di}{dt} + 36i = 0$$

We obtain the characteristic equation $\quad s^2 + 20s + 36 = 0$

$$s_1, s_2 = -\frac{20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 36} = -\alpha \pm \omega_0 = -10 \pm 8$$

This is an overdamped case. The solution of this equation:

$$i_x(t) = i_x(\infty) + A_1e^{-18t} + A_2e^{-2t}$$

At the initial condition:

$$i_x(0) = 2 = A_1 + A_2 \quad \text{and}$$

$$\frac{di_x(0)}{dt} = -24 = -18A_1 - 2A_2$$

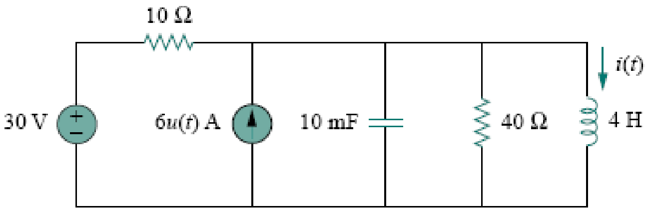
We obtain $A_1 = 1.25, A_2 = 0.75$ and then

$$i_x(t) = 1.25e^{-18t} + 0.75e^{-2t} \text{ Volts}$$

Therefore

$$v_R(t) = R(-i_x(t)) = 10e^{-2t} + 6e^{-18t}$$

Example From the circuit on the right hand side, calculate i(t) for t > 0.



At the initial condition:

$i(0^-) = 30/10 = 3$ A $\quad v(0^-) = 0$

At time = 0^+, using KVL to analyse2

$$v_L = v_C(0) = 0 = L\frac{di(0)}{dt}$$

$$\frac{di(0)}{dt} = 0$$

The final value of current through the inductor;

$$i(\infty) = i_f(t) = 9 \text{ A}$$

To obtain the natural response we remove all sources KCL

$$i + v/40 + i_C + \frac{v}{10} = 0$$

$$i + \frac{L}{40}\frac{di}{dt} + C\frac{dv}{dt} + \frac{L}{10}\frac{di}{dt} = 0$$

$$i + \frac{1}{10}\frac{di}{dt} + \frac{1}{100}4\frac{d^2i}{dt} + \frac{4}{10}\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{100}4\frac{d^2i}{dt} + \frac{1}{2}\frac{di}{dt} + i = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt} + \frac{25}{2}\frac{di}{dt} + 25i = 0$$

The characteristic equation $\quad s^2 + \frac{25}{2}s + 25 = 0 \quad \alpha = 6.25 > \omega_0 = 5$ Overdamped case

$$s_1, s_2 = -6.25 \pm \sqrt{6.25^2 - 25} = -10, -2.5$$

Natural response:

$$i_n(t) = A_1e^{-10t} + A_2e^{-2.5t}$$

The solution:

$$i(t) = 9 + A_1e^{-10t} + A_2e^{-2.5t}$$

To find the constant values:

$$i(0) = 3 = 9 + A_1 + A_2$$

The first order of the solution:

$$\frac{di(0)}{dt} = 0 = -10A_1 - 2.5A_2$$

We obtain $A_1 = 2, A_2 = -8$ therefore

$$i(t) = 9 + 2e^{-10t} - 8e^{-2.5t}$$