

## บทที่ 7 แรงแม่เหล็ก วัสดุแม่เหล็กและความเหนี่ยวนำ (Magnetic Forces, Materials and Inductance)

### วัตถุประสงค์

จากบทที่ผ่านมาเป็นการแนะนำสู่เรื่องสนามแม่เหล็กและตัวแปรที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะช่วยให้เราเข้าใจได้ว่าถ้ามีการกระจายของกระแสไฟฟ้าจะเป็นตัวกำเนิด ค่าตัวแปรของต่างของสนามแม่เหล็กใน Free-space ซึ่งอาจจะสามารถหาค่าได้หรือไม่ได้ขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของการคำนวณ ต่อจากนี้เราจะทำการศึกษาต่อเนื่องไปสู่เรื่องแรงและทอร์ก ซึ่งในสนามแม่เหล็กคงที่จะเกิดแรงกระทำต่อประจุที่มีการเคลื่อนที่เท่านั้น ซึ่งก็เป็นเหตุเป็นผลกับการที่สนามแม่เหล็กเกิดจากการเคลื่อนที่ของประจุหรือกระแสตัวเอง

### 7.1 แรงที่กระทำต่อประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่

จากบทเริ่มต้นของการเรียนวิชานี้กับแรงที่กระทำต่อประจุไฟฟ้าที่อยู่กับที่คือ

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

ทิศทางของแรงมีทิศทางเดียวกันกับสนามไฟฟ้า

สำหรับจุดประจุไฟฟ้าที่มีการเคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กจะเกิดแรงที่ประจุไฟฟ้าเนื่องจากสนามแม่เหล็กมีค่าเป็น

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

โดยที่ทิศทางของแรงจะอยู่ในแนวของเวกเตอร์ที่เป็นผลคูณของเวกเตอร์ความเร็ว  $\vec{v} \times \vec{B}$  ซึ่งแรงที่เป็นผลมาจากสนามทั้งสองเป็น

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

**D9.1.** The point charge  $Q = 18 \text{ nC}$  has a velocity of  $5 \times 10^6 \text{ m/s}$  in the direction  $\vec{a}_v = 0.04\vec{a}_x - 0.05\vec{a}_y + 0.2\vec{a}_z$ . Calculate the magnitude of the force exerted on the charge by the field: (a)  $\vec{B} = -3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 6\vec{a}_z \text{ mT}$ ; (b)  $\vec{E} = -3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 6\vec{a}_z \text{ kV/m}$ ; (c)  $\vec{B}$  and  $\vec{E}$  acting together.

(a)

$$\vec{v} = \frac{0.04\vec{a}_x - 0.05\vec{a}_y + 0.2\vec{a}_z}{\sqrt{0.04^2 + 0.05^2 + 0.2^2}} 5 \times 10^6 = (0.95\vec{a}_x - 1.19\vec{a}_y + 4.76\vec{a}_z) \times 10^6$$

$$\vec{F} = 18 \times 10^{-9} \times 10^6 \times 10^{-3} \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 0.95 & -1.19 & 4.76 \\ -3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 18(-26.18\vec{a}_x - 19.98\vec{a}_y + 0.23\vec{a}_z) \mu$$

$$|\vec{F}| = 18\sqrt{(-26.18)^2 + (-19.98)^2 + 0.23^2} \mu = 592.8 \mu \text{ N}$$

(b)

$$\vec{F} = Q\vec{E} = -54\vec{a}_x + 72\vec{a}_y + 108\vec{a}_z \mu \text{ N}$$

$$|\vec{F}| = 140.6 \mu \text{ N}$$

(c) รวมแรงที่ได้จากทั้งสองสนาม

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 18(-29.18\vec{a}_x - 15.98\vec{a}_y + 6.23\vec{a}_z) \mu \text{ N}$$

$$|\vec{F}| = 609.25 \mu \text{ N}$$

### 7.2 แรงที่กระทำต่ออนุพันธ์กระแส (Force on a differential current element)

แรงที่กระทำต่อประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอสามารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุพันธ์แรงที่เกิดกับอนุพันธ์ประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอเป็น

$$d\vec{F} = dQ\vec{v} \times \vec{B}$$

ซึ่งจะเป็นได้ว่าแรงรวมที่ได้นั้นเกิดจากแรงที่ได้จากประจุเล็กมากๆ แต่ละตัว รวมกันทั้งหมด แต่อย่างไรก็ตามในการทำงานเดียวกันเราจะสนใจที่ผลรวมแล้วคือแรงที่กระทำต่อแท่งตัวนำที่มีกระแสไหลในตัวนั่นเอง

จากที่เรียนมาแล้วเราจะให้ความหนาแน่นกระแสเป็น

$$\bar{J} = \rho_v \bar{v}$$

และจาก

$$dQ = \rho_v dv$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} d\bar{F} &= \rho_v dv \bar{v} \times \bar{B} \\ &= \bar{J} \times \bar{B} dv \end{aligned}$$

ซึ่งถ้าพิจารณาที่การกระจายของกระแสในแบบต่างๆ จะได้เป็น

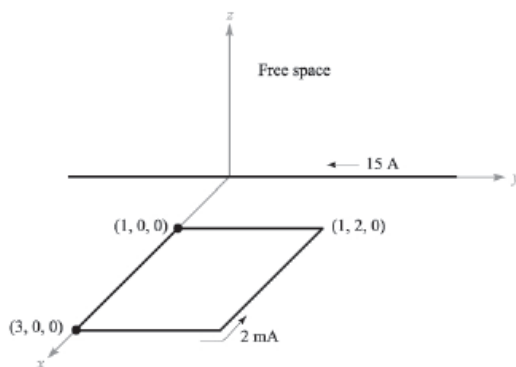
$$\begin{aligned} d\bar{F} &= \bar{K} \times \bar{B} dS \quad \text{การกระจายบนผิว} \\ d\bar{F} &= I d\bar{L} \times \bar{B} \end{aligned}$$

ในการหาแรงซึ่งเป็นผลรวมของแรงที่ได้จากอนุพันธ์ประจุที่เปลี่ยนไปอยู่ในรูปของการกระจายของกระแสต่างๆ (ประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่) จะได้จากกรณิการอนทิเกรตดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \int_v \bar{J} \times \bar{B} dv \\ \bar{F} &= \int_S \bar{K} \times \bar{B} dS \\ \bar{F} &= \oint Id\bar{L} \times \bar{B} = -I \oint \bar{B} \times d\bar{L} \end{aligned}$$

ถ้าเป็นกรณีที่มีกระแสไหลในตัวนำที่เป็นเส้นตรงวางในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ จะหาแรงได้เป็น

$$\bar{F} = I\bar{L} \times \bar{B} \quad F = ILB \sin \theta$$



ตัวอย่าง จงหาแรงที่เกิดจากสนามแม่เหล็กบนเส้นลวดปิด

หาสนามแม่เหล็กที่เกิดจากเส้นลวดอนันต์ รูปทั่วไป

$$\bar{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \bar{a}_\phi \quad \text{ซึ่งลวดปิดนั้นวางบนแกน x}$$

ดังนั้นได้สนามแม่เหล็กเป็น

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{I}{2\pi x} \bar{a}_z \\ \bar{B} &= \mu_0 \bar{H} = \frac{3}{x} \bar{a}_z 10^{-6} \end{aligned}$$

หาแรงที่กระทำบนลวดปิดเป็น

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \oint Id\bar{L} \times \bar{B} = \int_1^3 2dx \bar{a}_x \times \frac{3}{x} \bar{a}_z + \int_0^2 2dy \bar{a}_y \times \frac{3}{3} \bar{a}_z \\ &+ \int_3^1 2dx \bar{a}_x \times \frac{3}{x} \bar{a}_z + \int_2^0 2dy \bar{a}_y \times \frac{3}{1} \bar{a}_z \mu N \\ \bar{F} &= -6 \ln 3 \bar{a}_y + 4 \bar{a}_x + 6 \ln 3 \bar{a}_y + 6(0-2) \bar{a}_x \\ &= -8 \bar{a}_x \end{aligned}$$

\*\*\* ข้อสังเกตคือ  $I d\bar{L}$  ทิศทางไม่ได้ขึ้นกับกระแสโดยตรงแต่จะใช้เวกเตอร์ ดังนั้นแม้ว่าในด้านที่ 3 และ 4 ควรจะเป็นทิศทางลบ x และ y แต่จะใช้เป็น  $dx \bar{a}_x$  และ  $dy \bar{a}_y$  ไม่เป็นลบ (แต่มันจะเป็นลบเองที่ลิมิตของการอินทิเกรต) แต่ที่กระแสเชิงผิว  $\bar{K}$  และ  $\bar{J}$  หน้าตัดจึงใช้เป็นทิศทางของเวกเตอร์ทั้งสอง และอีกเหตุผลหนึ่งก็คือกระแส  $I$  เป็นสเกลาร์ไม่ใช่เวกเตอร์นั่นเอง

**D9.2.** The field  $\mathbf{B} = -2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$  mT is present in free space. Find the vector force exerted on a straight wire carrying 12 A in the  $\mathbf{a}_{AB}$  direction, given  $A(1, 1, 1)$  and: (a)  $B(2, 1, 1)$ ; (b)  $B(3, 5, 6)$ .

(a)

$$\begin{aligned} I\bar{L} &= 12\{(2-1)\bar{a}_x + (1-1)\bar{a}_y + (1-1)\bar{a}_z\} = 12\bar{a}_x \\ \bar{F} &= I\bar{L} \times \bar{B} \\ &= -48\bar{a}_y + 36\bar{a}_z \text{ mT} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} I\bar{L} &= 12\{(3-1)\bar{a}_x + (5-1)\bar{a}_y + (6-1)\bar{a}_z\} = 24\bar{a}_x + 48\bar{a}_y + 60\bar{a}_z \\ \bar{F} &= \begin{vmatrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ 24 & 48 & 60 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} m = (12\bar{a}_x - 216\bar{a}_y + 168\bar{a}_z) m \end{aligned}$$

### 7.3 แรงระหว่างอนุพันธ์กระแส

จากตัวอย่างในส่วนที่แล้วจะเป็นการหาแรงรวมที่ได้จากผลรวมของแรง ซึ่งในส่วนนี้จะเป็นการพิจารณาที่แรงขนาดเล็กที่ได้จากส่วนของกระแสที่มีขนาดเล็กทั้งสอง ซึ่งจะแยกออกเป็นส่วนที่กำเนิดสนามแม่เหล็กและส่วนที่เกิดแรงเนื่องจากสนามแม่เหล็กกับกระแสที่ไหลในส่วนที่จะทำการคำนวณหาค่าแรงดังกล่าว กำหนดให้ส่วนที่ 1 เป็นส่วนที่กำเนิดสนามแม่เหล็กที่ตำแหน่งของส่วนที่ 2 เป็นสนามแม่เหล็ก

$$d\bar{H}_2 = \frac{I_1 d\bar{L}_1 \times \bar{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2} \text{ A/m}$$

ดังนั้นแรงที่เกิดที่ส่วนที่ 2 จึงหาได้จาก

$$d\bar{F} = Id\bar{L} \times \bar{B}$$

ความหนาแน่นสนามแม่เหล็กที่ส่วนที่ 2 หาได้จากสนามแม่เหล็กข้างต้นซึ่งเป็นค่าอนุพันธ์ ส่วนของแรงจะเป็นส่วนที่ได้จากอนุพันธ์ความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กจึงเขียนได้เป็น

$$d(d\bar{F}_2) = I_2 d\bar{L}_2 \times d\bar{B}_2$$

$$d(d\bar{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{12}^2} d\bar{L}_2 \times (d\bar{L}_1 \times \bar{a}_{R12})$$

ซึ่งแรงรวมทั้งหมดจะหาได้จากกรอินทิเกรตนี้

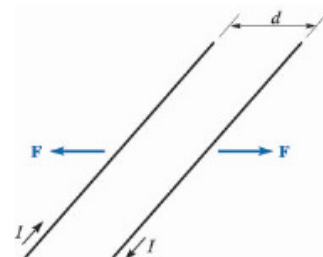
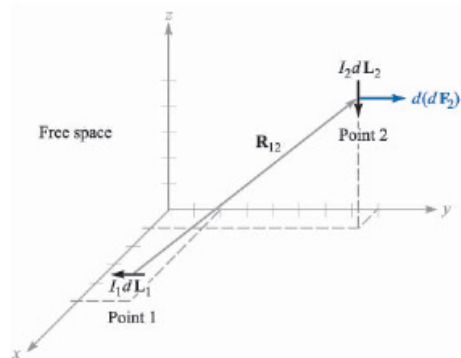
$$\begin{aligned} \bar{F}_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint d\bar{L}_2 \times \oint \left( \frac{d\bar{L}_1 \times \bar{a}_{R12}}{R_{12}^2} \right) \\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[ \oint \frac{\bar{a}_{R12} \times d\bar{L}_1}{R_{12}^2} \right] \times d\bar{L}_2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงคำนวณหาแรงระหว่างตัวนำกระแสที่มีความยาวเป็นอนันต์ จากรูปข้างมือ

กำหนดให้  $I_1 \Delta\bar{L}_1 = 3 \times 10^{-6} \bar{a}_y$  ที่จุด  $P_1(1,0,0)$  และ  $I_2 \Delta\bar{L}_2 = 3 \times 10^{-6} (-0.5\bar{a}_x + 0.4\bar{a}_y + 0.3\bar{a}_z)$  ที่  $P_2(2,2,2)$

วางใน Free space

(a) แรงที่ตัวนำที่ 1



$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} [\vec{a}_{R12} \times I_1 \Delta \vec{L}_1] \times I_2 \Delta \vec{L}_2$$

$$\vec{a}_{R12} = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} [(\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 2\vec{a}_z) \times 3 \times 10^{-6} \vec{a}_y] \times 3 \times 10^{-6} (-0.5\vec{a}_x + 0.4\vec{a}_y + 0.3\vec{a}_z)$$

$$= \frac{10^{-19}}{3} \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ -2 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.4 & 0.3 \end{vmatrix}$$

$$= 10^{-20} (-1.33\vec{a}_x + 0.33\vec{a}_y - 2.67\vec{a}_z) N$$

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} [\vec{a}_{R21} \times I_2 \Delta \vec{L}_2] \times I_1 \Delta \vec{L}_1$$

$$= (4.33\vec{a}_x + 0.667\vec{a}_z) 10^{-20} N$$

#### 7.4 แรงและทอร์กในวงจรรปิด (Force and torque in a closed circuit)

เราได้รูปทั่วไปของแรงที่ได้จากสนามแม่เหล็กในรูปของความเข้มของเส้นแรงแม่เหล็กเป็น

$$\vec{F} = I \oint d\vec{L} \times \vec{B} = -I \oint \vec{B} \times d\vec{L}$$

ในกรณีที่เส้นสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ แรงหาได้จาก

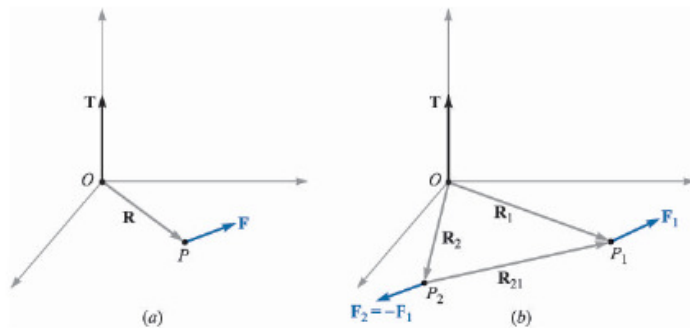
$$\vec{F} = -I \vec{B} \times \oint d\vec{L}$$

อย่างไรก็ตามเราได้พบว่าถ้าเป็นการอินทิเกรตครบรอบบนเส้นทางปิดที่อยู่ในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ จะมีค่าเป็นศูนย์  $\oint d\vec{L} = 0$  แต่ถ้าสนามไม่เป็นแบบ uniform ค่าแรงไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ ซึ่งเราสามารถสรุปได้ว่า ถ้าเส้นตัวนำที่เป็นเส้นทางปิดวางตัวอยู่ในสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ ผลรวมแรงที่กระทำกับเส้นลวดนั้นมีค่าเป็นศูนย์

แม้ว่าแรงรวมจะมีค่าเป็นศูนย์แต่ค่าทอร์กไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์

ทอร์กหรือโมเมนต์ นิยาม สมมติเป็นการหาทอร์กหรือโมเมนต์รอบจุดหนึ่งหรือโดยปกติจะเป็นจุด origin จะเรียกว่าเป็นจุดหมุน นั่นคือ ด้วยผลคูณระหว่างแรงกับระยะทางจากจุดหมุนซึ่งจะมีลักษณะเป็นเหมือนเป็นแขนและค่าไซน์ของมุมระหว่างแขนกับทิศทางของแรง

$$\vec{T} = \vec{R} \times \vec{F}$$



หรือถ้ามีแรงมากกว่าหนึ่งแรงดังรูป ซึ่งจะได้ว่า

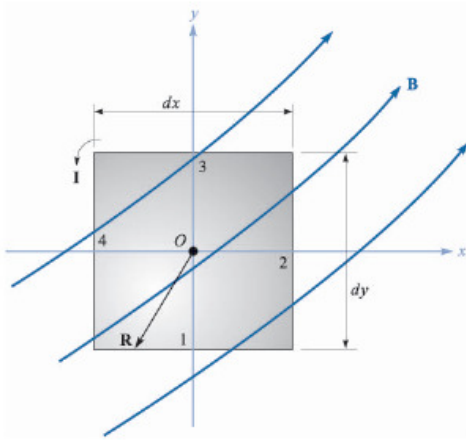
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

ทอร์กที่จุดหมุนจะได้เป็น

$$\vec{T} = \vec{R}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{R}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\bar{T} = (\bar{R}_1 - \bar{R}_2) \times \bar{F}_1 = \bar{R}_{21} \times \bar{F}_1$$

จากแนวคิดและนิยามของทอร์กหรือ โมเมนต์ ชำ้ตั้งทำให้เราสามารถที่จะประยุกต์ใช้ในสนามแม่เหล็ก รวมถึงแรงที่เกิดจากสนามแม่เหล็กซึ่งจะเป็นการนำไปสู่การหาทอร์กต่อไป ดังนั้น พิจารณารูปกระแสไหลในลูปปิดด้านล่างนี้



เส้นทางเดินปิดของกระแสรูปสี่เหลี่ยมมีความยาวและความกว้างเป็น  $dx, dy$  วางอยู่ในความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็ก  $\bar{B}$  โดยความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กที่จุดศูนย์กลางมีค่าเป็น  $\bar{B}_0$  และมีค่าเท่ากันที่ทุกจุดในพื้นที่ของสี่เหลี่ยมเพราะได้กำหนดไว้แล้วว่าสี่เหลี่ยมนี้มีขนาดเป็นอนุพันธ์ ดังนั้นจะทำให้แรงรวมทั้งหมดครบรอบบนเส้นทางเดินปิดเป็น ศูนย์ และในการเลือกจุดหมุนของการหาทอร์กนั้น โดยทั่วไปเลือกที่จุดศูนย์กลางของระนาบที่ล้อมด้วยเส้นทางปิด

แรงที่เส้นทางที่ 1 สามารถหาได้จาก

$$d\bar{F}_1 = Idx \bar{a}_x \times \bar{B}_0$$

โดยที่ ความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กในพิกัด Cartesian ที่จุด

ศูนย์กลาง

$$\bar{B}_0 = B_{0x} \bar{a}_x + B_{0y} \bar{a}_y + B_{0z} \bar{a}_z$$

$$d\bar{F}_1 = Idx (B_{0y} \bar{a}_z - B_{0z} \bar{a}_y)$$

แรงที่ได้เป็นแรงที่กระทำต่อเส้นทางที่ 1 โดยมีระยะจากจุดหมุนเป็นเวกเตอร์  $\bar{R} = -dy / 2 \bar{a}_y$  ซึ่งจะได้ทอร์กบนเส้นนำที่ 1 เป็น

$$\begin{aligned} d\bar{T}_1 &= \bar{R}_1 \times d\bar{F}_1 = (-dy / 2 \bar{a}_y) \times Idx (B_{0y} \bar{a}_z - B_{0z} \bar{a}_y) \\ &= -\frac{1}{2} dx dy I B_{0y} \bar{a}_x \end{aligned}$$

พิจารณาทำนองเดียวกันที่เส้นนำกระแสที่ 3 จะได้ทอร์กเป็น

$$d\bar{T}_3 = -\frac{1}{2} dx dy I B_{0y} \bar{a}_x = d\bar{T}_1$$

และได้เป็น

$$d\bar{T}_1 + d\bar{T}_3 = -dx dy I B_{0y} \bar{a}_x$$

ส่วนทอร์กจาก 2, 4 ซึ่งหาได้ด้วยวิธีเดียวกันข้างต้นได้

$$d\bar{T}_2 + d\bar{T}_4 = dx dy I B_{0x} \bar{a}_y$$

ผลรวมของทอร์กที่เกิดขึ้นทั้งหมดคือ

$$\begin{aligned} d\bar{T} &= dx dy I (B_{0x} \bar{a}_y - B_{0y} \bar{a}_x) = I dx dy (\bar{a}_z \times \bar{B}_0) \\ d\bar{T} &= Id\bar{S} \times \bar{B} \end{aligned}$$

$d\bar{S}$  เป็นเวกเตอร์ที่ใช้แสดงขนาดของพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยลูปของกระแส คูณกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบนั้น

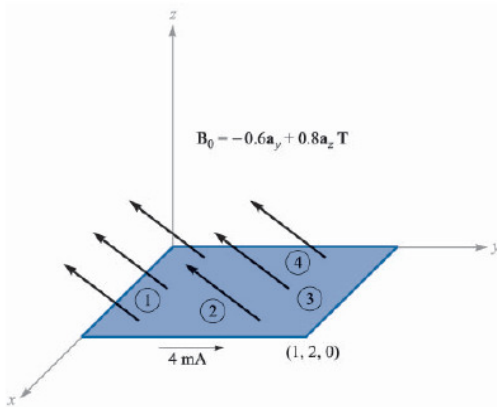
สองค่าแรงของสมการข้างต้นจะนิยามใหม่เป็น Magnetic dipole moment แทนด้วย  $d\bar{m}$  มีหน่วยเป็น  $\text{Am}^2$

$$d\bar{m} = Id\bar{S} \text{ แล้ว}$$

$$d\bar{T} = d\bar{m} \times \bar{B}$$

ซึ่งถ้าสนามแม่เหล็กเป็นสนามที่มีรูปแบบสม่ำเสมอ ดังนั้นค่าทอร์กบนระนาบใดๆ ที่วางอยู่ในสนามแม่เหล็กนี้จึงสามารถหาได้จาก

$$\bar{T} = I\bar{S} \times \bar{B} = \bar{m} \times \bar{B}$$



ตัวอย่าง คำนวณค่าทอร์ก จากสูตรรวมข้างต้นและ จากแรง  
 คูณระยะจากจุดหมุนจากทั้ง 4 ด้าน

**D9.5.** A conducting filamentary triangle joins points  $A(3, 1, 1)$ ,  $B(5, 4, 2)$ , and  $C(1, 2, 4)$ . The segment  $AB$  carries a current of  $0.2\text{ A}$  in the  $\mathbf{a}_{AB}$  direction. There is present a magnetic field  $\mathbf{B} = 0.2\mathbf{a}_x - 0.1\mathbf{a}_y + 0.3\mathbf{a}_z\text{ T}$ . Find: (a) the force on segment  $BC$ ; (b) the force on the triangular loop; (c) the torque on the loop about an origin at  $A$ ; (d) the torque on the loop about an origin at  $C$ .

**Ans.**  $-0.08\mathbf{a}_x + 0.32\mathbf{a}_y + 0.16\mathbf{a}_z\text{ N}$ ;  $0$ ;  $-0.16\mathbf{a}_x - 0.08\mathbf{a}_y + 0.08\mathbf{a}_z\text{ N}\cdot\text{m}$ ;  $-0.16\mathbf{a}_x - 0.08\mathbf{a}_y + 0.08\mathbf{a}_z\text{ N}\cdot\text{m}$

### 7.5 คุณสมบัติของวัสดุแม่เหล็ก (Nature of magnetic materials)

จากส่วนที่ผ่านมาได้แสดงให้เห็นนิยามและการหา ไดโพลโมเมนต์ (Magnetic dipole moment) ที่เกิดบนเส้นลวดปิดที่นำกระแสที่วางในสนามสนามแม่เหล็ก หรือในทางกลับกัน ถ้าไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอกเส้นลวดปิดนี้ก็สามารถกำหนดสนามแม่เหล็กได้จากกฎของ Biot-Savart นั่นเองซึ่งคุณสมบัติข้างต้นนี้จะใช้เพื่อที่จะทำการแบ่งวัสดุแม่เหล็ก

พิจารณาที่อะตอมโดยทั่วไปจะประกอบด้วยนิวเคลียสตรงกลางและล้อมรอบด้วยอิเล็กตรอน การที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบนิวเคลียสจะเป็นการเปรียบได้ว่าเป็นกระแสที่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของอิเล็กตรอน ซึ่งจากส่วนที่ได้อธิบายก่อนหน้านี้ ซึ่งจะได้เมกเนติกส์ไดโพลโมเมนต์ขึ้น นอกจากนี้ยังมีการหมุนของอิเล็กตรอนรอบแกนของมันเองและการหมุนของนิวเคลียสก็จะเป็นผลต่อค่าไดโพลโมเมนต์ของอะตอม ซึ่งค่าเหล่านี้จะถูกใช้อ้างอิงในการแยกประเภทของวัสดุแม่เหล็กต่อไป ซึ่งแบ่งเป็น 6 ชนิดได้แก่

1. Diamagnetic อะตอมของวัสดุนี้มีค่า เมกเนติกส์ไดโพลโมเมนต์ของแต่ละอะตอมเป็นศูนย์ ซึ่งเป็นผลของรวมของสนามแม่เหล็กภายในที่สร้างโดยการ โคจรของอิเล็กตรอนและการหมุนรอบตัวเองของอิเล็กตรอนมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะทำให้สนามแม่เหล็กไม่สามารถเหนี่ยวนำทำให้เกิดทอร์กขึ้นมาได้ที่อะตอมจึงไม่สามารถทำให้เกิดการเรียงตัวกันของอะตอมตามแรงของสนามแม่เหล็กภายนอกได้และแน่นอนไม่เกิดสนามแม่เหล็กภายในตามสนามแม่เหล็กที่ให้เข้าไป หรือถ้ากล่าวโดยตรงคือแม่เหล็กไม่สามารถดูดวัสดุนี้ได้ ตัวอย่างวัสดุนี้ได้แก่ ทองคำ เงิน ทองแดง bismuth ก๊าซเฉื่อย silicon germanium graphite sulphur เป็นต้น

2. Paramagnetic ถ้าผลของการหมุนรอบตัวเองอิเล็กตรอนกับการหมุนแบบโคจรไม่เกิดการหักล้างกันหมด ทำให้อะตอมจะมีค่า magnetic moment เล็ก แต่ด้วยทิศทางที่เกิดนั้นเป็นแบบสุ่มจึงทำให้ค่าเฉลี่ย magnetic moment เป็นศูนย์ ซึ่งจะไม่มีคุณสมบัติทางแม่เหล็ก เมื่อมีการให้สนามแม่เหล็กเข้าไปจะทำให้อะตอมวางเรียงตัวตามสนามแม่เหล็ก การวางเรียงตัวของอะตอมจะเป็นผลทำให้ค่าความหนาแน่นของเส้นแรงแม่เหล็กภายในสูงกว่าภายนอก แต่อย่างไรก็ตามจากผลกระทบของ diamagnetic ของการโคจรของอะตอมอาจจะเกิดซึ่งจะเป็นการลดค่า ความหนาแน่นของเส้นแรงแม่เหล็กภายในได้ ถ้าเป็นการลดค่าความหนาแน่นของเส้นแรงแม่เหล็กวัสดุนี้ยังเป็น Diamagnetic material อยู่ แต่ถ้าค่าความหนาแน่นมีค่าเพิ่มขึ้นจะเป็นวัสดุที่มีชื่อว่า Paramagnetic ได้แก่ โปแตสเซียม ทั้งสะเดน แมงกานีส โคโรเนียม เป็นต้น

ส่วนที่เหลือเป็นวัสดุที่มี atomic moment สูง นอกจากนี้ยังเป็นผลในการวางเรียงตัว magnetic moment กับอะตอมข้างเคียง หรือการวางตัวในทิศทางตรงกันข้าม

3. Ferromagnetic เป็นวัสดุที่มีความหนาแน่นของอะตอมสูงและในแต่ละอะตอมมีค่าไดโพลที่สูงมากเนื่องจากการโมเมนต์ของการหมุนของอิเล็กตรอน ระหว่างอะตอมจะมีแรงที่จะทำให้เกิดการเรียงตัวขนานกันในกลุ่มอะตอมขนาดใหญ่ ส่วนพื้นที่นี้เรียกว่า domain ซึ่งจะมีขนาดต่างๆ เมื่อมีสนามแม่เหล็กภายนอกเข้ามา จะทำให้เกิดการวางเรียงตัวของโมเมนต์ในแนวเดียวกับทิศทางของสนามที่ป้อนเข้ามาจากภายนอก เมื่อเอาสนามแม่เหล็กภายนอกออกไปแล้ว การวางตัวของโมเมนต์กลุ่มอะตอมส่วนหนึ่งยังวางตัวตามแนวของสนามแม่เหล็ก ซึ่งจะทำให้วัสดุกลายเป็นแม่เหล็กถาวรได้ ซึ่งจะใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ Hysteresis ในส่วนต่อไป วัสดุชนิดนี้ได้แก่ เหล็ก โคบอลต์ นิกเกิล โลหะผสม เป็นต้น

4. Antiferromagnetic แรงระหว่างอะตอมที่อยู่ข้างกันจะทำให้เกิดการวางตัวในแนวหักล้างกัน ผลรวมของ Magnetic moment มีค่าเป็นศูนย์ สนามแม่เหล็กไม่สามารถที่จะบังคับทิศทางการวางตัวของอะตอมเหล่านี้ได้ ได้แก่ สารออกไซด์ต่างๆ นิกเกิลออกไซด์ คลอไรด์ ได้แก่ โคบอลท์คลอไรด์ เป็นต้น

5. Ferritemagnetic วัสดุนี้จะมีส่วนต่อการวางเรียงตัวของโมเมนต์ แต่มีขนาดไม่มากนัก จึงทำให้โมเมนต์รวมไม่เป็นศูนย์ และการวางเรียงตัวของตอนสนองต่อสนามแม่เหล็กน้อยกว่าวัสดุกลุ่มของ ferromagnetic แต่ด้วยคุณสมบัติการเป็นตัวนำไฟฟ้าที่ต่ำกว่า ดังนั้น วัสดุนี้จึงเป็นตัวเลือกที่จะใช้ทำแกนหม้อแปลงไฟฟ้ากระแสสลับโดยเฉพาะที่ความถี่สูงเพื่อที่จะลดค่ากระแสที่เกิดในแกนหม้อแปลงที่เรียกว่า Eddy Current ได้แก่ เหล็กออกไซด์ นิกเกิลเฟอร์ไรท์ เป็นต้น

6. Superparamagnetic เป็นประกอบด้วยหรือฉาบวัสดุ Ferromagnetic จัดอยู่เป็นส่วนในรูปเมตริกส์ด้วย nonferromagnetic ซึ่งแต่ละส่วนมี domain แต่ไม่สามารถข้ามไปสู่ส่วนอื่นได้เพราะ nonferromagnetic กั้นอยู่ ตัวอย่างวัสดุนี้ที่สำคัญคือ Magnetic tape ที่ใช้ในเทปบันทึกเสียงและวีดี

คุณสมบัติของวัสดุต่างๆ รวบรวมอยู่ในตารางด้านล่างต่อไปนี้

Classification	Magnetic moments	$B$ values	Comments
Diamagnetic	$m_{orb} + m_{spin} = 0$	$B_{int} < B_{app}$	$B_{int} \doteq B_{app}$
Paramagnetic	$m_{orb} + m_{spin} = \text{small}$	$B_{int} > B_{app}$	$B_{int} \doteq B_{app}$
Ferromagnetic	$ m_{spin}  \gg  m_{orb} $	$B_{int} \gg B_{app}$	Domains
Antiferromagnetic	$ m_{spin}  \gg  m_{orb} $	$B_{int} \doteq B_{app}$	Adjacent moments oppose
Ferrimagnetic	$ m_{spin}  >  m_{orb} $	$B_{int} > B_{app}$	Unequal adjacent moments oppose; low $\sigma$
Superparamagnetic	$ m_{spin}  \gg  m_{orb} $	$B_{int} > B_{app}$	Nonmagnetic matrix; recording tapes

### 7.6 Magnetisation and Permeability

จาก dipole moment  $\bar{m}$  ที่เกิดจากกระแสของการโคจรของอิเล็กตรอนซึ่งจะเรียกว่า bound current,  $I_b$  โดยมีพื้นที่  $d\bar{S}$  ดังนั้น

$$\bar{m} = I_b d\bar{S}$$

โดยที่ ถ้ากำหนดให้  $n$  เป็นจำนวนไดโพลต่อปริมาตร ในปริมาตรหนึ่ง  $\Delta v$  ค่าไดโพลโมเมนต์รวมเป็นการรวมเวกเตอร์เป็น

$$\bar{m}_{total} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} m_i$$

แต่ละไดโพล โมเมนต์อาจจะมีค่าที่ต่างกันดังนั้นจะมีการนิยาม  $\bar{M}$  Magnetisation คือค่า magnetic dipole moment ต่อหน่วยปริมาตร

$$\bar{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} m_i$$

จะเป็นค่าที่เป็นลักษณะเช่นเดียวกับค่าสนามแม่เหล็กแต่ค่าสนามแม่เหล็กจะสัมพันธ์กับค่ากระแสที่ได้จากการเคลื่อนที่ของประจุอิสระแต่ Magnetisation จะเป็นค่าที่สัมพันธ์กับกระแส bound ดังนั้น ในเส้นทางปิด

$$I_b = \oint \bar{M} \cdot d\bar{L}$$

จากกรณีที่เรากล่าวถึงเกี่ยวกับทอร์กและกระแสของลูปปิดจะเป็นความสัมพันธ์กับ  $\bar{B}$  เป็นรูปทั่วไปดังเราจะเขียนสมการของ Ampere's Circuital Law ได้ค่ากระแสรวมเป็น

$$\oint \frac{\overline{B}}{\mu_0} \cdot d\overline{L} = I_T$$

ซึ่ง

$$I_T = I_b + I$$

โดยที่  $I$  เป็นค่ากระแสลัดที่ล้อมรอบเส้นทางปิด ไม่แสดงตัวห้อยเพราะเป็นค่ากระแสที่สำคัญที่ใช้ในสมการของ Maxwell รวมสมการเป็น

$$I = I_T - I_b = \oint \left( \frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{M} \right) \cdot d\overline{L}$$

จะเห็นได้ว่า

$$\overline{H} = \frac{\overline{B}}{\mu_0} - \overline{M} \quad \overline{B} = \mu_0 (\overline{H} + \overline{M})$$

จากที่มาของกระแสทั้งสามและ Curl

$$\nabla \times \overline{M} = \overline{J}_b$$

$$\nabla \times \frac{\overline{B}}{\mu_0} = \overline{J}_T$$

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J}$$

ดังนั้น วัสดุแม่เหล็กที่ไม่ใช่ Free space ที่เราได้กล่าวมาแล้วนั้น ความสัมพันธ์ของ  $\overline{B}$ ,  $\overline{H}$ ,  $\overline{M}$

$$\overline{B} = \mu_0 (\overline{H} + \chi_m \overline{H})$$

โดยที่

$$\overline{M} = \chi_m \overline{H}$$

ซึ่งจะได้

$$\overline{B} = \mu_0 \mu_r \overline{H} = \mu \overline{H}$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

โดยที่  $\chi_m$  เป็นค่า magnetic susceptibility  $\mu$  permeability และ  $\mu_r$  relative permeability

เราจะกล่าวถึงวัสดุแม่เหล็กที่เป็น isotropic เท่านั้น

Given a ferrite material which we shall specify to be operating in a linear mode with  $B = 0.05$  T, let us assume  $\mu_R = 50$ , and calculate values for  $\chi_m$ ,  $M$ , and  $H$ .

**D9.6.** Find the magnetization in a magnetic material where: (a)  $\mu = 1.8 \times 10^{-5}$  H/m and  $H = 120$  A/m; (b)  $\mu_R = 22$ , there are  $8.3 \times 10^{28}$  atoms/m<sup>3</sup>, and each atom has a dipole moment of  $4.5 \times 10^{-27}$  A·m<sup>2</sup>; (c)  $B = 300$  μT and  $\chi_m = 15$ .

*Ans.* 1599 A/m; 374 A/m; 224 A/m

**D9.7.** The magnetization in a magnetic material for which  $\chi_m = 8$  is given in a certain region as  $150z^2 \mathbf{a}_x$  A/m. At  $z = 4$  cm, find the magnitude of: (a)  $\mathbf{J}_T$ ; (b)  $\mathbf{J}$ ; (c)  $\mathbf{J}_b$ .

*Ans.* 108 A/m<sup>2</sup>; 12 A/m<sup>2</sup>; 96 A/m<sup>2</sup>



### 7.7 เงื่อนไขขอบเขตของวัสดุแม่เหล็ก

การพิจารณาของเขตของวัสดุแม่เหล็กที่มีคุณสมบัติที่ต่างกันคือ ต่างกันที่คุณสมบัติเบื้องต้นคือ ค่า permeability

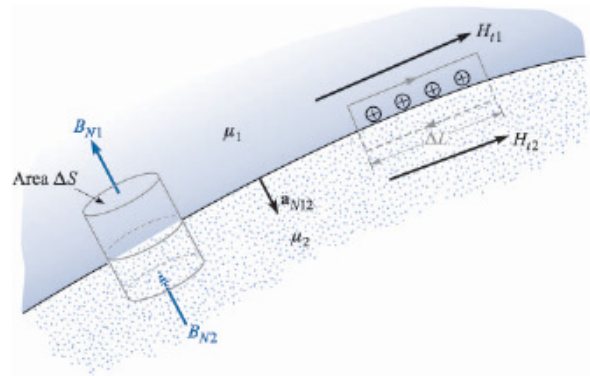
จาก

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$$

ด้านข้างจะมีค่าเป็นศูนย์จากที่เส้นแรงแม่เหล็กเข้าและออกเท่ากันจึงได้เป็น

$$B_{N1} \Delta S - B_{N2} \Delta S =$$

$$B_{N1} = B_{N2}$$



และอีกเงื่อนไขคือพิจารณาจาก Ampere's Circuital Law

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = I$$

$$H_{t1} \Delta l - H_{t2} \Delta l = K \Delta l$$

$$H_{t1} - H_{t2} = K$$

To illustrate these relationships with an example, let us assume that  $\mu = \mu_1 = 4 \mu\text{H/m}$  in region 1 where  $z > 0$ , while  $\mu_2 = 7 \mu\text{H/m}$  wherever  $z < 0$ . Moreover, let  $\mathbf{K} = 80\mathbf{a}_x \text{ A/m}$  on the surface  $z = 0$ . We establish a field,  $\mathbf{B}_1 = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \text{ mT}$ , in region 1 and seek the value of  $\mathbf{B}_2$ .

**D9.8.** Let the permittivity be  $5 \mu\text{H/m}$  in region  $A$  where  $x < 0$ , and  $20 \mu\text{H/m}$  in region  $B$  where  $x > 0$ . If there is a surface current density  $\mathbf{K} = 150\mathbf{a}_y - 200\mathbf{a}_z \text{ A/m}$  at  $x = 0$ , and if  $H_A = 300\mathbf{a}_x - 400\mathbf{a}_y + 500\mathbf{a}_z \text{ A/m}$ , find: (a)  $|\mathbf{H}_{tA}|$ ; (b)  $|\mathbf{H}_{nA}|$ ; (c)  $|\mathbf{H}_{tB}|$ ; (d)  $|\mathbf{H}_{nB}|$ .

*Ans.* 640 A/m; 300 A/m; 695 A/m; 75 A/m

### 7.8 Magnetic circuits

Magnetic circuit ซึ่งฟังดูเหมือนจะทำให้เราจินตนาการถึงวงจรไฟฟ้าของความต้านทานและแหล่งจ่าย ซึ่งก็ไม่ผิดทั้งหมดกับการที่คำนวณวงจรไฟฟ้าที่เป็นวงจรที่เป็นเชิงเส้น แต่ควรจะเป็นวงจรที่ประกอบด้วยอุปกรณ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะเหมาะสมกว่าซึ่งเป็นผลมาจากคุณสมบัติ Ferromagnetic อย่างไรก็ตามด้วยส่วนที่คล้ายคลึงกันในการวิเคราะห์เราจะเริ่มต้นจากการพิจารณาจากจุดที่เริ่มต้นที่เหมือนกับของสนามไฟฟ้าที่ได้พิจารณามาแล้ว จาก

$$\bar{E} = -\nabla V$$

ส่วนในสนามแม่เหล็ก scalar magnetic potential ได้มีการนิยามมาแล้วจากบทที่ผ่านมา ดังนั้น

$$\bar{H} = -\nabla V_m$$

ซึ่งในการพิจารณาต่อกับ Magnetic circuit  $V_m$  จะถูกเรียกอีกอย่างว่า electromotive force หรือ mmf ซึ่งอ้างอิงถึง electromotive force หรือ emf ส่วนหน่วยของ mmf คือ ampere-turns จะเป็นการอ้างอิงถึงกรณีของขดลวดที่นำกระแสไฟฟ้ากับจำนวนรอบของขดลวด

จากค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างจุดสองจุดสามารถหาโดย

$$V_{AB} = -\int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{L} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{L}$$

ในทำนองเดียวกัน Scalar magnetic potential สามารถหาได้จาก

$$V_{mAB} = \int_A^B \bar{H} \cdot d\bar{L}$$

และจากกฎของโอห์มในวงจรไฟฟ้าในรูปแบบของจุด

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \text{ ซึ่งสอดคล้องกับ } \bar{B} = \mu \bar{H}$$

ซึ่งกระแสสามารถหาได้จาก

$$I = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S} \text{ ส่วนจำนวนเส้นแรงแม่เหล็ก } \Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$$

เป็นการเปรียบเทียบการพิจารณาในรูปแบบที่สอดคล้องกันระหว่างกระแสกับเส้นแรงแม่เหล็ก

จากวงจรไฟฟ้าที่คุ้นเคยคือ  $V = IR$  และจากนิยามของ reluctance  $\mathcal{R}$  จึงทำให้เราได้ว่า

$$V_m = \Phi \mathcal{R}$$

Reluctance มีหน่วยเป็น A-t/Wb จาก  $R = \frac{d}{\sigma S}$  ดังนั้น ในกรณีที่เป็วัสดุแม่เหล็กที่เป็น linear isotopic homogeneous และมี

คุณสมบัติ uniform ตลอดพื้นที่ S ความยาว d ค่า reluctance สามารถคำนวณได้จาก

$$\mathcal{R} = \frac{d}{\mu S}$$

ในการอินทิเกรตสนามไฟฟ้าในบนเส้นทางเดินปิดซึ่งเป็นลูปของวงจรไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์  $\oint \bar{E} \cdot d\bar{L} = 0$  แต่ในสนามแม่เหล็กจะได้เป็น

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = I_{total} \text{ แต่ส่วนใหญ่จะเป็นขดลวดที่พันด้วยจำนวน N รอบ}$$

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = NI$$

ในวงจรแม่เหล็กนั้น กระแสจะไม่ไหลหรือตัวแปรที่อยู่ในวงจรแม่เหล็กแต่ตัวแปรที่อยู่ในวงจรแม่เหล็กคือเส้นแรงแม่เหล็ก

ตัวอย่าง ในช่วงเริ่มต้นเพื่อจำกัดความซับซ้อนอันเนื่องจากคุณสมบัติของ Ferromagnetic แกนของ Torroid 500 รอบ เป็นแกนอากาศ มีพื้นที่หน้าตัดเป็น  $6 \text{ cm}^2$  และมีรัศมีของจุดกลางเป็น 15 cm กระแส 4 A ซึ่งเป็นที่รู้แล้วว่าสนามแม่เหล็กทั้งหมดจะอยู่ภายใน Toroid ถ้าเราพิจารณาที่รัศมีกลางของ Toroid จะ

$$V_m = NI = 2000 \text{ A-t}$$

ค่า Reluctance

$$\mathcal{R} = \frac{2\pi 15 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} = 1.25 \times 10^9 \text{ A-t/Wb}$$

ค่าจำนวนเส้นแรงแม่เหล็กทั้งหมด

$$\Phi = \frac{V_{m(source)}}{\mathcal{R}} = \frac{2000}{1.25 \times 10^9} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

ค่าความหนาแน่นเส้นแรงสนามแม่เหล็ก

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1.6 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4}} = 2.67 \text{ mT}$$

ค่าสนามแม่เหล็ก

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1.67 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} = 2120 \text{ A-t/m}$$

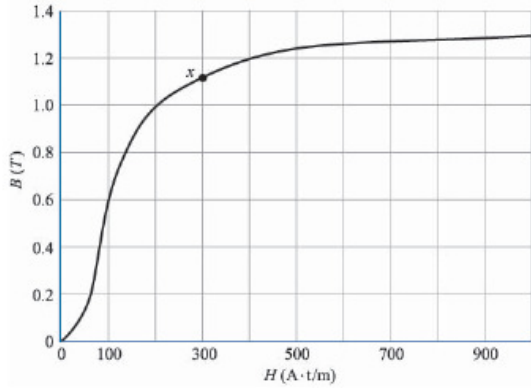
หรือจะคำนวณค่า สนามแม่เหล็กจาก Ampere's circuital Law

$$H_\phi 2\pi r = NI$$

$$H_\phi = \frac{2000}{2\pi 15 \times 10^{-2}} = 2120 \text{ A-t/m}$$

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าตัวกลางที่เส้นแรงแม่เหล็กผ่านนั้นเป็นตัวกลางเนื้อเดียวจึงไม่สามารถหาค่า mmf ระหว่างตัวกลางที่ต่างชนิดกันได้ ซึ่งจะมีความสอดคล้องกันกับวงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วย หนึ่งแหล่งจ่ายและหนึ่งโหลดหรือความต้านทานนั่นเอง แต่อย่างไรก็ตามเราก็พิจารณาองค์ประกอบอื่นๆ ในทำนองเดียวกับวงจรไฟฟ้าต่อไป

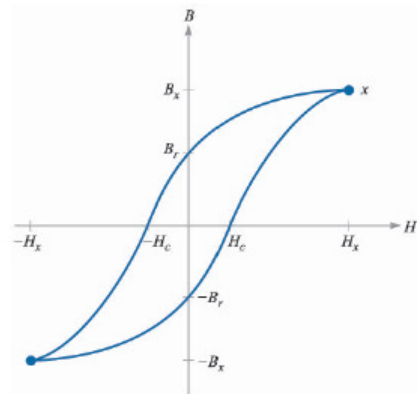
สิ่งที่ต้องทำความเข้าใจอีกอย่างคือ เมื่อสารแม่เหล็กพวก Ferromagnetic อยู่ในวงจรแม่เหล็ก ซึ่งถ้าพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กและความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กโดยเริ่มจาก ค่าศูนย์ที่ต่ำกว่ากว่าเมื่อ เพิ่ม mmf ความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กเพิ่มขึ้นแต่ไม่เป็นเชิงเส้น ตัวอย่างความสัมพันธ์ของ  $\bar{B}$  กับ  $\bar{H}$  ของ Silicon ดังกราฟที่แสดงในรูปข้างล่าง



จะเห็นว่าความสัมพันธ์  $\bar{B} = \mu\bar{H}$  ไม่สามารถใช้ได้ทั้งหมดในส่วนของภาคปฏิบัติ

หลังจากที่ค่าสนามแม่เหล็กเพิ่มขึ้นมากกว่าประมาณ 700 A-t/m ค่าความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กจะมีค่าคงที่สถานะนี้เรียกว่าสถานะแม่เหล็กอิ่มตัว (Saturation)

ซึ่งกรณีของการเกิดการอิ่มตัวสามารถหาได้จากอีกสถานะที่พบคือ ในช่วงที่มีการลดค่าสนามแม่เหล็กจนเป็นศูนย์แต่ค่าความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กมีค่าไม่เป็นศูนย์จะมีค่าเป็น  $B = B_r$  ซึ่งถ้าต้องการให้ค่าความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กเป็นศูนย์จะต้องมีการให้ mmf ค่าในทางตรงข้ามเข้าไปได้ ขนาดสนามแม่เหล็กที่จุดนี้เป็น  $H_C$  ซึ่งถ้ามีการทดสอบไปจนถึงค่าอิ่มตัวของจำนวนเส้นแรงแม่เหล็กแล้วลดค่า mmf ลงไปจนถึงสถานะอิ่มตัวอีกด้านหนึ่งซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ของ  $\bar{B}$  กับ  $\bar{H}$  เป็นลูป ซึ่งมีชื่อเรียกว่า Hysteresis loop ดังแสดงในรูปต่อไปนี้ ซึ่งรูปก่อนหน้านั้นเป็นรูปของวัสดุที่มีการใช้เบ็ครั้งแรกที่เริ่มจากค่าที่เป็นศูนย์ที่จุดแต่ถ้ามีการใช้งานต่อเนื่องต่อไปจะสังเกตจากลูปได้ว่าไม่เห็นจุดที่ทั้งค่าสนามแม่เหล็กและค่าความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดเดียวกัน



ตัวอย่าง ในขดลวด Toroid รัศมี 15 cm ที่มีแกนขดลวดเป็น Silicon steel แต่ไม่ครบรอบทั้งหมดเพราะช่องอากาศอยู่ 2 mm จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กและความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กหาว่ากระแสที่วิ่งในขดลวดมีค่าเท่าใด โดยที่จำนวนขดลวดทั้งหมด 500 รอบ และค่าความเข้มสนามแม่เหล็กที่ทุกจุดใน Toroid มีค่าเท่ากันเป็น 1 T กำหนดให้พื้นที่หน้าตัดของ Silicon steel เป็น 6 ตารางเซนติเมตร

หา mmf ของช่องอากาศ

$$\mathfrak{R} = \frac{d_{air}}{\mu_0 S} = \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} = 2.65 \times 10^6 \text{ A-t/Wb}$$

จำนวนเส้นแรงแม่เหล็กที่ช่องอากาศหาได้จาก

$$\Phi = BS = 1 \times 6 \times 10^{-4} = 6 \times 10^{-4} \text{ wb}$$

mmf หรือ  $V_{m,air}$  ที่ช่องอากาศ

$$V_{m,air} = \Phi \mathfrak{R} = 2.65 \times 10^6 \times 6 \times 10^{-4} = 1590 \text{ A-t}$$

ที่ Silicon Steel หาค่าสนามแม่เหล็กจากกราฟ จะได้ว่า  $B = 1 \text{ T}$  ที่  $H = 200 \text{ A/m}$  และจาก  $V_m = H \cdot L$

$$V_{m,steel} = 200 \times (2\pi \cdot 0.15 - 0.002) = 188 \text{ A-t}$$

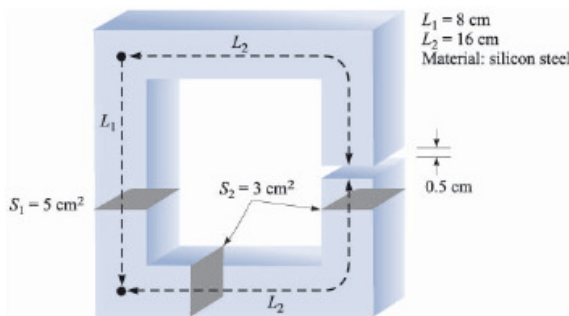
ผลรวมของ mmf จะได้เป็น

$$NI = V_{m,air} + V_{m,steel} = 1590 + 188$$

$$I = 1778/500 = 3.56 \text{ A}$$

ในการคำนวณเหล่านี้ส่วนมากจากการประมาณค่าทั้งนั้นไม่ว่าจะเป็นความยาวของแกนขดลวดที่ใช้ค่ากลาง ใน air gap ขนาดของพื้นที่หน้าตัดก็ประมาณจากค่าขนาดของแกน ค่าเส้นแรงแม่เหล็กที่รั่วที่ แกนกับช่องอากาศและที่ขดลวดกับแกนขดลวด ก็ไม่ได้มีการนำมารวมในการคำนวณด้วยซึ่งจะเป็นตัวที่จะต้องคำนึงในการพิจารณาในทางปฏิบัติ

ตัวอย่าง จากรูปงหา mmf หรือ magnetic potential ของช่องอากาศและของแกนขดลวดและกระแสในขดลวด 1300 รอบ โดยที่ ความหนาแน่นสนามแม่เหล็กที่  $L_1$  เป็น 0.6 T



หาค่า magnetic potential ที่แต่ละส่วน

ที่  $L_1$

จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง B กับ H จะได้ สนามแม่เหล็กประมาณ 100 A-t/m จึงได้ magnetic potential

$$V_{m,L1} = HL = 100 \times 8 \times 10^{-2} = 8 \text{ A-t}$$

$$\Phi_{L1} = BS = 0.6 \times 5 \times 10^{-4}$$

$$= 0.3 \text{ mWb}$$

ซึ่งจะให้ค่าความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กที่  $L_2$  เป็น

ที่  $L_2$  ทั้งสองความยาวรวมเป็น 36

$$B_{L2} = \Phi_{L1} / S_2 = 3 \times 10^{-4} / (3 \times 10^{-4})$$

$$= 1 \text{ T}$$

สมมติว่าไม่มีเส้นแรงแม่เหล็กที่สูญหายไปไหนซึ่งจะได้ค่า

สนามแม่เหล็กจากกราฟเป็น 200 A-t

$$V_{m,L2} = 200 \times 36 \times 10^{-2} = 72 \text{ A-t}$$

$$V_{m,steel} = 8 + 72 = 80 \text{ A-t}$$

หาค่า mmf ของช่องอากาศ โดยที่ประมาณค่าพื้นที่หน้าตัดของช่องอากาศเท่ากับของ  $L_2$  ซึ่งจะได้ค่า reluctance เป็น

$$\mathcal{R}_{air} = \frac{d_{air}}{\mu_0 S_{air}} = \frac{5 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^{-4}} = 13.258 \times 10^6$$

โดยไม่คำนึงถึงค่า Flux leakage

$$V_{m,air} = 3 \times 10^{-4} \times 13.258 \times 10^6 = 3977 \text{ A-t}$$

หาค่ากระแสที่ไหลในขดลวด 1300 รอบ

$$NI = V_{m,steel} + V_{m,air} = 4057$$

$$I = 4057/1300 = 3.12 \text{ A}$$

## 7.9 Potential energy and Forces on magnetic materials

อ้างอิงไฟฟ้าสถิตย์ พลังงานที่สะสมจากการเลื่อนประจจากอนันต์มายังจุดใดสามารถหาได้จาก

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \bar{D} \cdot \bar{E} dv \text{ จากบทที่ 4}$$

โดยที่สนามไฟฟ้าและความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กไฟฟ้ามีความสัมพันธ์กันเป็นเชิงเส้น

ซึ่งในสนามแม่เหล็กที่การหาพลังงานสะสมนั้นมีความซับซ้อนอยู่ซึ่งจะกล่าวอีกทีในบทถัดไปหลังจากที่มีความเข้าใจในเรื่องของสนามที่ขึ้นกับเวลาแล้วซึ่งตอนที่เราจะพิจารณากรณีที่สนามแม่เหล็กและความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น ในทำนองเดียวกันเราจะได้

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \bar{B} \cdot \bar{H} dv$$

ซึ่งก็คือ  $\bar{B} = \mu \bar{H}$  แล้วจะได้สมการหาพลังงานเป็น

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \mu H^2 dv \text{ หรือ}$$

$$W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \frac{B^2}{\mu} dv$$

จะได้ที่กรณีที่เป็นตัวกลางที่เป็นเชิงเส้นเท่านั้น โดยทั่วไปคือ อากาศ ตัวอย่างที่จะกล่าวดังต่อไปนี้คือ สมมติขดลวด Solenoid ที่มีแกนเป็น Silicon steel โดยมีจำนวนขดลวดที่พันรอบแกนในอัตราส่วน  $n$  ขดต่อเมตร ที่กระแสในขดลวด  $I$  จะได้สนามแม่เหล็กเป็น  $nI$  A-t/m ดังนั้นค่าความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กที่ได้จากกราฟความสัมพันธ์เป็น  $B_s$  สมมติให้แกนทำมาจากแท่งทรงกระบอกสองแท่งที่ต่อกันแบบสัมผัส เมื่อเราออกแรงเพื่อที่จะแยกแท่งทรงกระบอกทั้งสองออกจากกัน โดยจะยังให้ความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กคงที่ โดยออกแรงดึง  $F$  ให้แท่งทั้งสองห่างกัน  $dL$  งานที่ทำจึงเป็น  $FdL$  แต่เราจะยังไม่พิจารณากฎของ Faraday ที่นี้ ดังนั้นเราจะเปรียบเทียบกรณีนี้กับการดึงแท่งแกน โดยที่ความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กคงที่นี้กับพลังงานที่สะสมในช่องอากาศระหว่างแกนที่เป็นโลหะ จากสมการข้างต้น

$$dW_H = FdL = \frac{1}{2} \frac{B^2 S}{\mu_0} dL$$

โดยที่  $S$  เป็นพื้นที่หน้าตัดของช่องอากาศโดยทั่วไปจะประมาณพื้นที่หน้าตัดของแกนโลหะ

$$F = \frac{1}{2} \frac{B^2 S}{\mu_0}$$

**D9.11.** (a) What force is being exerted on the pole faces of the circuit described in Prob. D9.9 and Figure 9.13? (b) Is the force trying to open or close the air gap?

*Ans.* 1194 N; as Wilhelm Eduard Weber would put it, "schliessen"

ตัวอย่าง จากตัวอย่างก่อนหน้านั้นจงหาค่าแรงที่ช่องอากาศและเป็นแรงที่ดูดหรือผลักกันระหว่างหน้าตัดของแกนโลหะ

$$F = \frac{1}{2} \frac{B^2 S}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{1^2 \times 3 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-7}} = 1193 \text{ N เป็นแรงดูด}$$

## 7.10 ค่าความเหนี่ยวนำและค่าความเหนี่ยวนำสัมพัทธ์ (Inductance and Mutual Inductance)

พิจารณาที่ค่าความต้านทานที่ได้จากอัตราส่วนของศักย์ไฟฟ้าระหว่างจุดสองจุดกับค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในเส้นทางของค่าความต่างศักย์นั้น ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันของลักษณะทางกายภาพกับการนำไฟฟ้า (Conductivity)  $\left( R = \frac{d}{\sigma S} \right)$  ส่วนค่าความจุของคาปาซิเตอร์ (Capacitance) คืออัตราส่วนของประจุไฟฟ้าที่แผ่นประจุทั้งสองต่อความต่างศักย์ระหว่างสองแผ่นประจุนั้น ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ permittivity ของฉนวนไฟฟ้าที่อยู่ระหว่างแผ่นประจุไฟฟ้า กับคุณสมบัติทางกายภาพ  $\left( C = \frac{\epsilon S}{d} \right)$

ลองพิจารณานิยามของค่าการเหนี่ยวนำ (Inductance) ซึ่งก่อนอื่นมาลองทำความเข้าใจ Flux linkage โดยสมมติว่าขดลวด Toroid ที่มีจำนวนขดเป็น  $N$  และมีกระแสไฟฟ้าไหล  $I$  สร้างเส้นแรงแม่เหล็กทั้งหมดเป็น  $\Phi$  ซึ่งจะเห็นได้ว่า ที่แต่ละขดลวดนั้นจะมีเส้นแรงแม่เหล็กผ่านเชื่อมกันทั้งหมด  $\Phi$  Flux linkage  $N\Phi$  เป็นนิยามของ Flux linkage เช่นถ้าขดลวดรอบเดียว Flux linkage จึงเป็น  $\Phi$  รวม

นิยามของค่าความเหนี่ยวนำของขดลวดเป็น อัตราส่วนของ Flux linkage ที่ผ่านขดลวด ต่อ กระแสที่ไหลในขดลวดนั้น

$$L = \frac{N\Phi}{I} \text{ Henry}$$

ซึ่งจะมีข้อจำกัดที่ วัสดุที่เป็นเชิงเส้นเพราะอย่างเช่นถ้าแกนเป็น Ferromagnetic ค่าความเหนี่ยวนำจะหาจากสมการนี้ไม่ได้

ลองคำนวณหาค่าความเหนี่ยวนำต่อหน่วยความยาวของสาย Coaxial จากบทที่ที่ผ่านมา จำนวนเส้นแรงแม่เหล็กหาได้จาก

$$\Phi = \frac{\mu_0 Id}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

ค่าความเหนี่ยวนำต่อความยาว  $d$  จึงได้เป็น

$$\frac{L}{d} = \frac{\Phi}{dI} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \text{ H/m}$$

สำหรับ Toroid ความหนาแน่นสนามแม่เหล็กหาได้โดย

$$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho}$$

โดยมีแกนเป็น อากาศ และสามารถหาค่าเส้นแรงแม่เหล็กรวมเป็น

$$\Phi = \frac{\mu_0 NIS}{2\pi\rho_0}$$

$\rho_0$  เป็นรัศมีกลางของขดลวด

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi\rho_0} \text{ Henry}$$

ในกรณีที่แต่ละขดลวดนั้น มีจำนวนเส้นแรงที่ผ่านไม่เท่ากัน ค่าเส้นแรงแม่เหล็กรวมจึงหาจากผลรวมของเส้นแรงแม่เหล็กจากแต่ละขด

$$N\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$$

นิยามของความเหนี่ยวนำสามารถหาได้โดยจากรูปแบบของพลังงานคือ

$$L = \frac{2W_H}{I^2}$$

$$L = \frac{2 \int_{vol} \bar{B} \cdot \bar{H} dv}{I^2}$$

และจากความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กไฟฟ้าจาก Magnetic potential vector ( $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ )

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{vol} \bar{H} \cdot (\nabla \times \bar{A}) dv$$

จากคุณสมบัติที่เหมือนกันของเวกเตอร์

$$\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{H}) \equiv \bar{H} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{H})$$

$$L = \frac{1}{I^2} \left[ \int_{vol} \nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{H}) dv + \int_{vol} \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{H}) dv \right]$$

$$L = \frac{1}{I^2} \left[ \oint_S (\bar{A} \times \bar{H}) \cdot d\bar{S} + \int_{vol} \bar{A} \cdot (\bar{J}) dv \right]$$

การอินทิเกรตรอบผิวปิดของพลังงานในรูปของแม่เหล็กจะเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{vol} \bar{A} \cdot \bar{J} dv \text{ หรือกรณีที่ เป็น กระแส ใน ส่วน ของ เส้น ตรง}$$

$$L = \frac{1}{I^2} \oint \bar{A} \cdot I \bar{L} dL = \frac{1}{I} \oint \bar{A} \cdot \bar{L} dL \text{ ใช้ Stroke's Theorem}$$

$$L = \frac{1}{I} \oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{I} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

จากการวิเคราะห์ในนิยามของ พลังงานที่ Flux ที่ได้เป็นของผิวเปิด แต่เมื่อพิจารณาจากจำนวนขดลวด N ก็จะได้สมการของความเหนี่ยวนำเป็น

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

ภายในตัวนำที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงกลมที่มีรัศมี a ก็จะเกิดค่าความเหนี่ยวนำภายในซึ่งจะเป็นค่าที่จะนำไปรวมเป็นค่าความเหนี่ยวนำรวม

$$L_{a,int} = \frac{\mu}{8\pi}$$

เราจะทำการสรุปและนิยาม Mutual inductance ระหว่างวงจร 1 และ 2 แทนด้วย  $M_{12}$  เป็น

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

โดยที่  $\Phi_{12}$  เป็นเส้นแรงแม่เหล็กที่สร้างจากกระแส  $I_1$  ซึ่งจะเชื่อมต่อไปที่ส่วนทางเดินของกระแส  $I_2$  ที่ขดลวด  $N_2$  Mutual inductance เป็นค่าที่เกี่ยวกับแม่เหล็กที่มาจากกระแสสองตัว ถ้าเป็นผลมาจากกระแสเดียวพลังงานจะสะสมในสนามแม่เหล็กที่สามารถหาได้ในรูปหนึ่งความเหนี่ยวนำซึ่งเรียกว่า Self-inductance ถ้าในขดลวดทั้งสองกระแสไม่เป็นศูนย์พลังงานจะสะสมในฟังก์ชันของ Self inductance 2 ค่าแล้ว Mutual inductance ในเทอมของพลังงานสะสม Mutual inductance สามารถหาได้จาก

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{vol} \vec{B}_1 \cdot \vec{H}_2 dv$$

โดยที่  $\vec{B}_1$  ได้จากสนามที่ได้จาก  $I_1$  โดยที่  $I_2 = 0$   $\vec{H}_2$  จากสนามที่ได้จาก  $I_2$  โดยที่  $I_1 = 0$  ซึ่งถ้าพิจารณาแล้วจะเห็นว่า

$$M_{12} = M_{21}$$

ตัวอย่าง สมมติขดลวด Solenoid ที่อยู่ในลักษณะ Coaxial ที่มีรัศมี  $R_1 = 2$  cm,  $R_2 = 3$  cm และจำนวนขดลวดต่อความยาว  $n_1 = 50$  รอบต่อซม.  $n_2 = 80$  รอบต่อซม. จงหา Mutual inductances and Self inductances ต่อหน่วยความยาว

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad \begin{aligned} \vec{H}_1 &= n_1 I_1 \vec{a}_d \\ \vec{B}_1 &= \mu_0 n_1 I_1 \vec{a}_d \end{aligned}$$

$$\Phi_{12} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = B_1 \pi R_1^2 \quad \text{แม้จะเป็น } S_2 \text{ แต่จริงๆ แล้วสนามแม่เหล็กนอกรัศมี } R_1 \text{ มีค่าเป็นศูนย์ตามนิยาม}$$

Solenoid

$$M_{12} = \frac{\mu_0 n_1 n_2 I_1 \pi R_1^2}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2 = 4\pi \times 10^{-7} 5000 \times 8000 \pi (0.02)^2 = 63.2 \text{ mH/m}$$

หา Mutual inductance

$$M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{I_2} = \frac{n_1 \mu_0 n_2 I_2 \pi R_1^2}{I_2} = M_{12} = 63.2 \text{ mH/m}$$

หาค่า Self inductance

$$L_{11} = \frac{n_1 \Phi_{11}}{I_1} \quad \Phi_{11} = \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^2$$

$$L_{11} = \mu_0 n_1^2 \pi R_1^2 = 39.5 \text{ mH/m}$$

$$L_{22} = \frac{n_2 \Phi_{22}}{I_2} = \mu_0 n_2^2 \pi R_2^2 = 22.7 \text{ mH/m}$$

ตัวอย่าง คำนวณหาค่า Self-inductance

- (a) สาย Coaxial ยาว 3.5 cm ที่มีรัศมี a = 0.8 mm และ b = 4 mm และมีวัสดุที่มี Relative permeability = 50

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} d \ln \frac{b}{a} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 50}{2\pi} 3.5 \times 10^{-2} \ln \frac{4}{0.8} = 56.3 \mu\text{H}$$

- (b) Toroid ที่มีหน้าตัดเป็นจตุรัส 2.5x2.5 cm<sup>2</sup> และรัศมีภายในเป็น 2 cm โดยมีจำนวนขดลวดเป็น 500 ขด

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}{I} = \frac{N \int_S \mu \vec{H} \cdot d\vec{S}}{I} = \frac{N\mu \int_{0.02}^{0.045} \frac{NI}{2\pi\rho} 2.5 \times 10^{-2} d\rho}{I}$$

$$L = \frac{\mu N^2}{2\pi} 2.5 \times 10^{-2} \ln(\rho)_{0.02}^{0.045} = 1.014 \text{ mH}$$

- (c) Solenoid ที่มีขดลวดรอบ 500 ขด ขนาดของแกนมีรัศมี 2 cm โดยที่  $0 < \rho < 0.5 \text{ cm}$  :  $\mu_R = 50$  ส่วนที่เหลือมี  $\mu_R = 1$  ความยาวของ Solenoid เป็น 50 cm  
จากสนามไฟฟ้าภายในแกนของ Solenoid มีค่าโดยเฉลี่ยเป็น

$$H = \frac{NI}{d} = \frac{500I}{d} \text{ จึงได้ความหนาแน่นสนามไฟฟ้าเป็น } B = \mu H$$

$$\text{ในดักกลางที่ 1 } B_1 = \mu_0 \mu_R H = 4\pi \times 10^{-7} 50 \times \frac{500I}{50 \times 10^{-2}}$$

$$\Phi_1 = B_1 \pi (0.5 \times 10^{-2})^2 = 20\pi \times 10^{-3} I \pi (0.5 \times 10^{-2})^2 = 5\pi^2 \times 10^{-7} I$$

$$\text{ในดักกลางที่ 2 } B_2 = \mu_0 \mu_R H = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{500I}{50 \times 10^{-2}} = 4\pi \times 10^{-4}$$

$$\Phi_2 = B_2 \pi [(2 \times 10^{-2})^2 - (0.5 \times 10^{-2})^2] = 1\pi^2 \times 10^{-8} I$$

$$L = \frac{N\Phi_{total}}{I} = \frac{500(5 + 1.5)\pi^2 \times 10^{-7} I}{I} = 3.21 \text{ mH}$$

ตัวอย่าง Solenoid ความยาว 50 cm ที่ซ้อนกันโดยที่ตัวที่ 1 มีเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง 2 cm มีขดลวด 1500 รอบ แกนมีค่า Relative permeability 75 ส่วนที่ 2 ที่ล้อมส่วนที่ 1 ด้วยเส้นผ่าศูนย์กลาง 3 cm ขดลวด 1200 รอบ

- (a) จงหา L ของขดตัวใน

$$L_{11} = \frac{n_1 \Phi_{11}}{I} = \frac{n_1 B S}{I} = \frac{n_1 \mu H S}{I} = \frac{n_1 \mu \frac{n_1 I}{d} S}{I} = \frac{\mu n_1^2 S}{d} = \frac{4\pi \times 10^{-7} 75 n_1^2 \pi (1 \times 10^{-2})^2}{50 \times 10^{-2}}$$

$$= 133.2 \text{ mH}$$

- (b) จงหา L ของขดตัวนอก (Self inductance) แต่จะประกอบด้วยสองสารที่ใช้เป็นแกน

$$\Phi_1 = \frac{\mu_{in} n_2 I_2 S_1}{d} = \frac{4\pi \times 10^{-7} 75 \times 1200 I_2 \pi (1 \times 10^{-2})^2}{50 \times 10^{-2}} \text{ และ}$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_{out} n_2 I_2 (S_2 - S_1)}{d} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1200 I_2 \pi [(1.5 \times 10^{-2})^2 - (1 \times 10^{-2})^2]}{50 \times 10^{-2}}$$

$$L_{22} = \frac{n_2 \Phi_{22}}{I_2} = \frac{1200(\Phi_1 + \Phi_2)}{I_2}$$



$$L_{22} = \frac{1200(72\pi^2 \times 10^{-7} I_2 + 1.2\pi^2 \times 10^{-7} I_2)}{I_2} = 86.7 \text{ mH}$$

(c) หา Mutual inductance ระหว่างขดลวดเป็น

ให้ขดที่สองเป็นแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็ก

$$H_2 = \frac{n_2 I_2}{d} \quad B_2 = \mu H_2 = \mu \frac{n_2 I_2}{d} \quad \Phi_{21} = \frac{\mu_0 \mu_R n_2 I_2}{d} S_1$$

$$M_{21} = \frac{n_1 \Phi_{21}}{I_2} = \frac{1500 \times 4\pi \times 10^{-7} 75 \times 1200}{50 \times 10^{-2}} \pi (0.01)^2 = 106.6 \text{ mH}$$