บทที่ 7 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

วัตถุประสงค์

1. ให้สามารถแปลงค่าจากโดเมนของเวลาไปอยู่ในโดเมนความถี่
2. เข้าใจถึงความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อนกับโพลาร์และเอกซ์โปเนนเชียล
3. สามารถคำนวณและหาความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของ Phasor ได้เป็นอย่างดีเพื่อที่จะใช้งานต่อไป
4. เข้าใจถึงความสำคัญของ Phasors ต่อการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ
5. สามารถวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับในโดเมนความถี่ด้วย Phasors ตามกฎและทฤษฎีทางไฟฟ้าทั้งหมดที่ได้กล่าวมาแล้วในไฟฟ้ากระแสตรง

จากการเครื่องมือที่จำเป็นสำหรับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ และการวิเคราะห์พื้นฐานได้กล่าวมาแล้วในบทที่ผ่านมาซึ่งในบทนี้จะเป็นการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับที่มีความซับซ้อนขึ้น

จากตัวอย่างการคำนวณในบทที่ผ่านมาเราจะเห็นได้ว่าในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับนั้น จะมีหลักการเหมือนกันกับการวิเคราะห์ในวงจรไฟฟ้ากระแสตรงแต่จะสังเกตได้ว่ามีขั้นตอนที่เพิ่มเข้ามาซึ่งสรุปได้เป็น

1. แปลงวงจรไฟฟ้ากระสลับให้อยู่ในโดเมนความถี่หรือที่เรียกว่า Phasor

2. ทำการหาค่าที่ต้องการในวงจรโดยเทคนิคของการวิเคราะห์วงจรที่เหมาะสมไม่ว่าจะเป็น Ohm's law, Nodal analysis, Mesh analysis etc. (ซึ่งเป็นการวิเคราะห์หรือคำนวณทั้งขนาดและมุมเฟส)

3. แปลงค่าจากโดเมนความถี่เพื่อให้ได้คำตอบในโดเมนเวลา

7.1 การวิเคราะห์โหนด Nodal analysis

เป็นการวิเคราะห์โดยใช้กฎของเคอร์ชอฟ KCL

ตัวอย่าง จงหาแรงดันตกคร่อม ตัวเก็บประไฟฟ้า

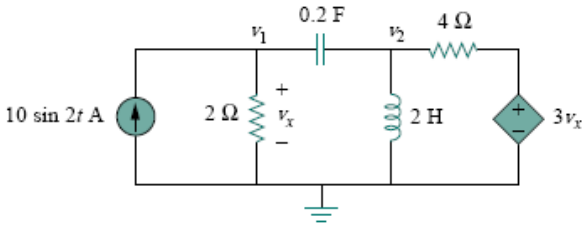
ก่อนที่จะใช้เทคนิค Nodal analysis ต้องแปลงค่าต่างๆ ให้เป็น Phasor

$$10\sin 2t = 10\cos(2t-90^\circ) \rightarrow 10\angle -90^\circ \;\; 0.2F \rightarrow \frac{1}{j2(0.2)} = -2.5j \quad 2H \rightarrow 4j$$

Node v1

$$\frac{\overline{V}_1}{2} + \frac{(\overline{V}_1 - \overline{V}_2)}{-2.5j} - 10\angle -90^\circ = 0$$

$$(5+4j)\overline{V}_1 - 4j\overline{V}_2 = 100\angle -90 \qquad (1)$$



Node v2

$$\frac{\overline{V}_2 - 3\overline{V}_x}{4} + \frac{(\overline{V}_2 - \overline{V}_1)}{-2.5j} + \frac{\overline{V}_2}{4j} = 0$$

$$v_x = v_1$$

$$(2.5+1.5j)\overline{V}_2 - (7.5+4j)\overline{V}_1 = 0 \qquad (2)$$

$(1)\times(2.5+1.5j)$

$$(6.5+17.5j)\overline{V}_1 + (6-10j)\overline{V}_2 = 291.5\angle 30.96^\circ \qquad (3)$$

$(2)\times(4j)$

$$(-6+10j)\overline{V}_2 - (30j-16)\overline{V}_1 = 0 \qquad (4)$$

(4)+(3)

$$(22.5-12.5j)\overline{V}_1 = 291.5\angle 30.96$$

$$\overline{V}_1 = \frac{291.5\angle 30.96}{25.74\angle -29.05} = 11.32\angle 60$$

$$v_1(t) = 11.32\cos(2t+60)$$

หาค่า v_2 จากสมการที่ (2)

$$(2.5+1.5j)\overline{V}_2 - (7.5+4j)11.32\angle 60^\circ = 0$$

$$\overline{V}_2 = \frac{96.22\angle 60 + 28.1}{2.5+1.5j} = 33\angle 57.14$$

$$v_2(t) = 33\cos(2t+57.14)$$

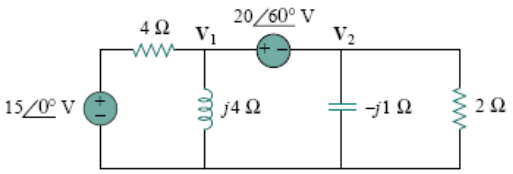
ค่าที่ต้องการคือ แรงดันไฟฟ้าตกคร่อม คาปาซิเตอร์

$v_C = v_1 - v_2$ ซึ่งต้องหาจาก Phasor $\overline{V}_C = \overline{V}_1 - \overline{V}_2$

$$11.32\cos(60) + j\sin(60) - 17.91 - 27.72j = -12.26 - 17.93j = 21.72\angle 180 + 55.64$$

$$v_C = 21.72\cos(2t + 235.64^\circ)$$

ตัวอย่าง จงหาค่า v_1, v_2 จาวงจรด้านล่างนี้



ซึ่งเป็นคำถามที่น่าจะใช้วิธีการวิเคราะห์ Nodal Analysis ก่อนอื่นพิจารณาที่แหล่งจ่ายแรงดันระหว่าง Node 1กับ Node 2 เป็น Supper Node ดังนั้น

$$\overline{V}_1 - \overline{V}_2 = 20\angle 60^\circ$$

$$\overline{V}_2 = \overline{V}_1 - 20\angle 60^\circ$$

รวบ suppernode เป็น โหนดเดียว

$$\frac{\overline{V}_1 - 15\angle 0}{4} + \frac{\overline{V}_1}{j4} + \frac{\overline{V}_2}{-j} + \frac{\overline{V}_2}{2} = 0$$ แทนค่า $\overline{V}_2$ จะได้

$$\frac{\overline{V}_1 - 15\angle 0}{4} + \frac{\overline{V}_1}{j4} + \frac{\overline{V}_1 - 20\angle 60}{-j} + \frac{\overline{V}_1 - 20\angle 60}{2} = 0$$

$$(3+3j)\overline{V}_1 = 15\angle 0 + 80j\angle 60 + 40\angle 60$$

$$= 15 + 80\cos(60+90) + j80\cos(60+90) + 40\cos(60) + j40\sin(60)$$

$$\overline{V}_1 = \frac{-34.28 + 74.64j}{3+3j} = \frac{82.14\angle 180 - 65.33}{4.24\angle 45} = 19.37\angle 69.67^\circ$$

$$\overline{V}_2 = 19.37\angle 69.67 - 20\angle 60$$

$$= 6.82 + 18.28j - (10 + 17.32j)$$

$$= -3.18 + 0.96j = 3.32\angle 180^\circ - 17.21^\circ$$

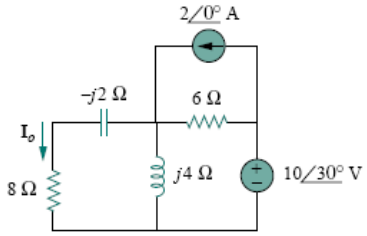
$$v_1(t) = 19.37\cos(\omega t + 69.67)$$

$$v_2(t) = 3.32\cos(\omega t + 162.79)$$

7.2 การวิเคราะห์ลูป Mesh analysis

เป็นการวิเคราะห์ที่คำตอบโดยทั่วไปเป็นกระแสที่ไหลในเส้นทางปิด โดยผลรวมของแรงดันไฟฟ้าในลูปปิดใดๆ เป็นศูนย์ ซึ่งก็เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ผ่านมาจะต้องเป็นการวิเคราะห์ในโดเมนของความที่ที่จะต้องพิจารณาเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่รวมทั้งรูปโพลาร์และ exponential เพื่อที่จะทำการคำนวณทั้งขนาดและมุมเฟสที่สอดคล้องกันตลอด

ตัวอย่าง จงหาค่ากระแส $i_0(t)$ และขนาดตัวเก็บประจุที่อัตราเร็วเชิงมุมเป็น 1000 rad/s



พิจารณาวงจรด้านซ้ายมือ จะใช้การวิเคราะห์ Mesh 2 ลูป เท่านั้น และเป็นการวิเคราะห์ในโดเมนความถี่

Loop1

$$8\bar{I}_0 + 4j(\bar{I}_0 - \bar{I}_2) - 2j\bar{I}_0 = 0$$

$$(8+2j)\bar{I}_0 - 4j\bar{I}_2 = 0 \qquad (1)$$

Loop2

$$4j(\bar{I}_2 - \bar{I}_0) - 10\angle 30^\circ + 6(\bar{I}_2 - 2\angle 0^\circ) = 0$$

$$(6+4j)\bar{I}_2 - 4j\bar{I}_0 = 10\angle 30 + 12\angle 0 = 20.66 + j5 \qquad (2)$$

การแก้สมการด้วย Kramer's rule จากสมการ (1) and (2)

$$\begin{bmatrix} 8+2j & -4j \\ -4j & 6+4j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{I}_0 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20.66+5j \end{bmatrix}$$

$$[A][I] = [C]$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 8+2j & -4j \\ -4j & 6+4j \end{vmatrix} = (8+2j)(6+4j) + 16 = 56 + 44j$$

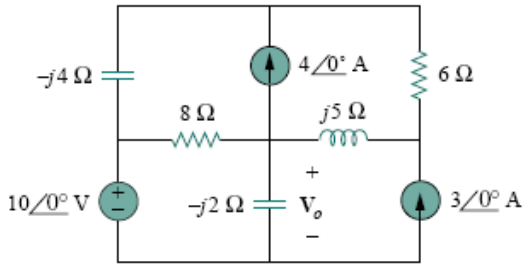
$$\bar{I}_0 = \begin{vmatrix} 0 & -4j \\ 20.66+5j & 6+4j \end{vmatrix} / \det(A) = \frac{-20+82.64j}{56+44j} = 0.5 + j1.09 = 1.2\angle 65.36^\circ$$

$$i_0 = 1.2\cos(1000t + 65.36^\circ)$$

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} = -2j$$

$$C = \frac{1}{2000} = 0.5 \text{ mF}$$

Example Find V_o at angle velocity of 10 rad/s.



Mesh analysis (in Phasor)

The Capital letters preset phasors.

Loop1 is a supper-loop cover the current source of 4 A

$$-4jI_1 + 6I_2 + j5(I_2 + 3\angle 0^\circ) + 8(I_1 - I_3) = 0$$

$$I_2 - I_1 = 4\angle 0^\circ$$

$$(8-4j)I_1 + (6+5j)I_2 - 8I_3 + 15j\angle 0 = 0 \text{ Then substitute } I_2$$

$$(14+j)I_1 - 8I_3 + 24\angle 0 + 35j\angle 0 = 0 \qquad (1)$$

Loop2

$$8(I_3 - I_1) - 2j(I_3 + 3\angle 0) - 10\angle 0 = 0$$

$$(8-2j)I_3 - 8I_1 - 10\angle 0 - 6j\angle 0 = 0 \qquad (2)$$

(1)x8+(2)x(14+j)

$$(50-20j)I_3 + 58 + 186j = 0$$

$$I_3 = \frac{-58-186j}{50-20j} = 0.283 - 3.607j = 3.62\angle -85.5^\circ = 3.62\angle 247.5^\circ$$

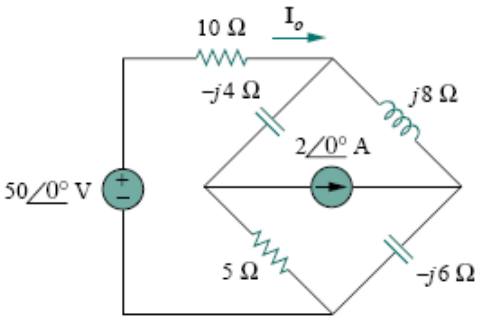
Thus

$$V_O = (I_3 + 3)\times(-2j) = (3.283 - 3.607j)(2j) = -7.21 - 6.57j = 9.76\angle 222.3^\circ$$

$$v_O(t) = 9.76\cos(10t + 222.3^\circ)$$

จะเห็นว่าในการตอบมุมนั้นสามารถหาอยู่ในรูปมุมตามเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกาก็ได้โดยจะมีค่าเป็นลบและบวกตามลำดับซึ่งไม่ควรเกิน 360 และที่นิยมคือมุมทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่าง หาค่ากระแส I_o



ใช้ KVL or Mesh analysis

ลูป1

$$(10 - 4j + 5)I_1 - (-4j)I_2 - 5I_3 - 50\angle 0^\circ = 0$$

ซุปเปอร์ลูป

$$(j8 - 4j)I_2 - (-4j)I_1 + (5 - 6j)I_3 - 5I_1 - 0$$

$$I_3 = 2\angle 0 + I_2$$

แทน I_3 ในสองสมการข้างต้น

$$(15 - 4j)I_1 - (5 - 4j)I_2 = 60\angle 0 \qquad (1)$$

$$(5 - 2j)I_2 - (5 - 4j)I_1 = -10 + 12j \qquad (2)$$

(1)*(5-2j)+(2)*(5-4j)

$$(67 - 50j - 9 + 40j)I_1 = 300 - 120j - 2 + 100j$$

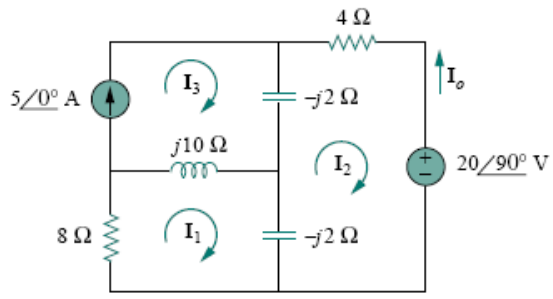
$$I_1 = I_O = \frac{298 - 20j}{58 - 10j} = 5.075\angle 5.94^\circ$$

7.3 Superposition

ในกรณีที่วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับมากกว่าหนึ่งแหล่งจ่าย โดยการวิเคราะห์วงจรนั้นจะทำทีละแหล่งจ่ายโดยที่แหล่งจ่ายอื่นจะถูกปลดออกจากวงจรแล้วแทนที่ด้วย SC ถ้าแหล่งจ่ายที่ปลดออกนั้นเป็นแหล่งจ่ายแรงดัน และ แทนที่ด้วย OC ถ้าแหล่งจ่ายที่ปลดออกนั้นเป็นแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้า แล้วนำผลการวิเคราะห์ที่ได้จากแต่ละแหล่งจ่ายมารวมกันเป็นค่าที่ต้องการจากวงจรรวม (ซึ่งจะเห็นได้ว่าการวิเคราะห์ในกรณีที่มีแหล่งจ่ายเดียวจะสะดวกและง่ายกว่ากรณีที่มีแหล่งจ่ายหลายแหล่งพร้อมกัน)

แต่มีข้อสังเกตอยู่ว่าถ้ามีแหล่งจ่ายที่มีค่าความถี่ต่างกันซึ่งจะเป็นผลโดยตรงต่อค่า Reactance ของ Impedance ที่แปรผันตรงกับความถี่ ซึ่งก็มีคำถามอยู่ว่าถ้าเราไม่ใช้วิธีการวิเคราะห์นี้แล้วเราจะมีวิธีการอื่นอีกไหมที่จะหาค่าต่างๆ ในวงจร นี่เป็นข้อดีมากๆ ของการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าแบบ Superposition ดังตัวอย่างที่แสดงข้างล่างนี้

Example Using superposition to determine I_o



$$I_O = I_O^{'} + I_O^{''}$$

Find I_o' from the voltage source with opening the current source;

Z = (8+10j)//(-2j)+(-2j)+4

$$I_O^{'} = \frac{20\angle 90^\circ}{Z} = \frac{20\angle 90^\circ}{4.25 - 4.25j} = 3.33\angle 135$$

Calculate $I_O^{''}$ by using KVL 2 loops (Shorting the voltage source)

Loop I_2 $\quad (4-4j)I_2 - (-2j)5\angle 0 - (-2j)I_1 = 0$

$$(4-4j)I_2 + 2jI_1 + 10j\angle 0^\circ = 0 \qquad (1)$$

Loop I_1 $\quad (8+8j)I_1 + 2jI_2 - 50j\angle 0 = 0 \qquad (2)$

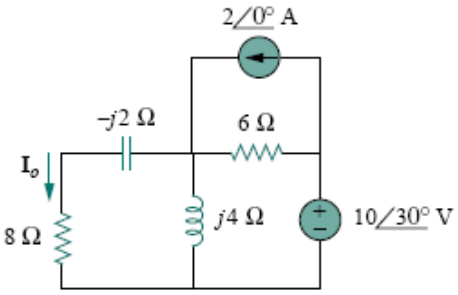
(1)*(8+8j)-(2)*2j

$$68I_2 = 180 - 80j$$

$$I_2 = \frac{180-80j}{68} = 2.65 - 1.18j = -I_O^{''}$$ (Don't forget to check the direction of the current)

$$I_O = I_O^{'} + I_O^{''} = -2.36 + 2.36j - 2.65 + 1.18j = -5 + 3.53j = 6.12\angle 144.8$$

ตัวอย่าง จงหาค่ากระแสไฟฟ้า I_O โดย Superposition



เปิดวงจรที่แหล่งจ่ายกระแสแล้วคำนวณหาค่า I_{O1} เป็นการรวมความต้านทานหาความต่างศักย์คร่อมตัวเหนี่ยวนำ

$$V = \frac{10\angle 30}{(8-2j)//(4j)+6}(8-2j)//(4j)$$

$$I_{O1} = \frac{V}{8-2j} = \frac{4.63\angle 67.81}{8.25\angle -14.04} = 0.08 + 0.556j$$

$$= 0.56\angle 81.84^\circ$$

นำแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ากลับเข้ามาแล้วปิดวงจรตัดแหล่งจ่ายแรงดันออกจากวงจรแล้วคำนวณค่ากระแส I_{O2} โดย

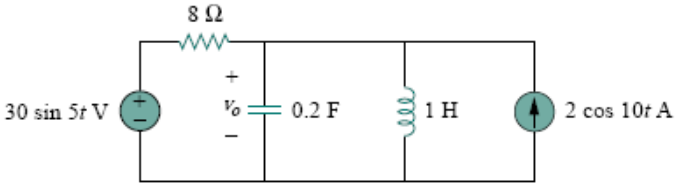
$$I_{O2} = \frac{(8-2j)//6//(4j)\times 2\angle 0^\circ}{(8-2j)} = 0.416 + 0.530j$$

$$I_O = I_{O1} + I_{O2} = 0.080 + 0.556j + 0.416 + 0.530j = 0.496 + 1.086j$$

$$= 1.194\angle 65.47^\circ$$

ตัวอย่าง จงหา v_O

จากวงจรซ้ายมือ จะเห็นได้ว่าวิธีที่น่าจะเหมาะสมที่สุดคือ Superposition



เปิดวงจรแหล่งจ่ายกระแส

หากระแสผ่านความต้านทานก่อน แต่มีข้อสังเกตอีกว่า แหล่งจ่ายทั้งสองนั้นมีความถี่หรืออัตราเร็วเชิงมุมที่ไม่เท่ากันดังนั้นในการใช้เฟสเซอร์นั้นค่าพารามิเตอร์จะมีค่าที่ต่างกันที่ความถี่ต่างกันโดยเฉพาะตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำ

ω =5 rad/s $\quad X_L = 5j \quad X_C = -j$

$$I = \frac{30\angle 90^\circ}{8 + 5j\,//(-j_)} = \frac{30\angle 90^\circ}{8 - 1.25j} = -0.572 + 3.661j$$

$$V_{O1} = I(5j\,//-\,j) = (-0.572 + 3.661j)(-1.25j) = 4.576 + 0.715j$$

$$= 4.631\angle 8.88$$

$$v1 = 4.63\sin(5t + 8.88)$$

ปิดวงจรที่แหล่งจ่ายแรงดัน

ω =10 rad/s $\quad X_L = 10j \quad X_C = -0.5j$

$$V_{O2} = IZ_{total} = 2\angle 0^\circ\left(8\,//-0.5j\,//10j\right) = 0.069 - 1.048j = 1.05\angle -86.24^\circ$$

$$v2 = 1.05\sin(10t - 86.24)$$

ดังนั้น $v_O = v1 + v2 = 4.63\sin(5t + 8.88^\circ) + 1.05\sin(10t - 86.24^\circ)$

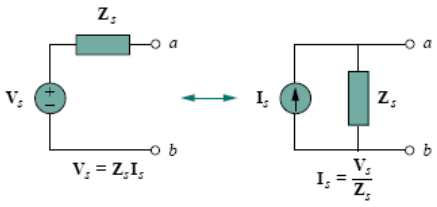
การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับที่มีแหล่งจ่ายที่มีความถี่ต่างกันในการวิเคราะห์วงจรจะต้องทำที่แต่ละความถี่ด้วย Superposition

จะเห็นได้ว่าบางตัวอย่างวิธีการวิเคราะห์ด้วย Superposition ก็ไม่ได้ทำให้การวิเคราะห์มีความง่ายขึ้นเช่นตัวอย่างแรกนั้น จะเห็นว่าต้องมีการวิเคราะห์ด้วย Mesh 2 meshes ซึ่งในการวิเคราะห์ในตัวอย่างก่อนหน้าก็วิเคราะห์ด้วยขั้นตอนที่น้อยกว่า ดังนั้น จึงเป็นหนึ่งในข้อแนะนำว่า การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้านั้นไม่ได้มีวิธีเดียวแต่อย่างไรจะมีวิธีอย่างน้อยหนึ่งวิธีที่จะง่ายหรือเหมาะสมกับแต่ละวงจร ซึ่งถ้าถามว่าแล้วจะรู้ได้อย่างไร คำตอบก็คือประสบการณ์ในการทำโจทย์ ซึ่งถ้าทำโจทย์มากพอ เพียงเห็นวงจรก็จะสามารถเลือกการวิเคราะห์ได้อย่างเหมาะสมโดยอัตโนมัตินั่นเอง

7.4 Source Transformation

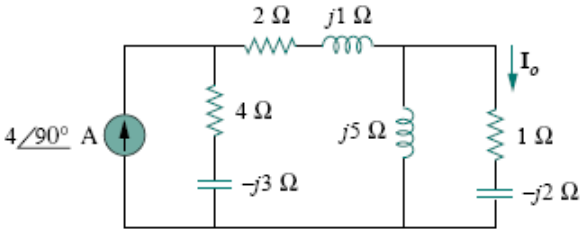
การแปลงแหล่งจ่ายนั้นเพื่ออำนวยความสะดวกในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า ตัวอย่างเช่น ถ้าเป็นการวิเคราะห์แบบ Mesh นั้นแหล่งจ่ายที่เหมาะสมและง่ายต่อการวิเคราะห์คือแหล่งจ่ายแรงดัน แต่ถ้าเป็นการวิเคราะห์แบบ โหนด แหล่งจ่ายที่เหมาะสมในการวิเคราะห์คือแหล่งจ่ายกระแส ในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับก็เช่นเดียวกัน แต่เป็น Phasor voltage source ก็คือเป็นการวิเคราะห์ด้วย Phasors หรือในโดเมนความถี่

$$V_S = I_S Z_S$$



$$I_S = V_S / Z_S$$

ตัวอย่าง จงหากระแส I_o



จากลักษณะของวงจร ถ้าวิเคราะห์ด้วยการยุบวงจรจากขวามือไปทางซ้ายมือก็สามารถทำได้ แต่จะเห็นว่าค่าที่ต้องการจะเป็นค่าที่อยู่ขวามือ ซึ่งถ้ามีการรวมโหลดไปทางซ้ายก็จะต้องมีขั้นตอนที่ต้องกระจายโหลดกลับเพื่อที่จะหาคำตอบที่ขวามือสุด ดังนั้นลองพิจารณาวิธีการนี้

โดยย่อ คือ แปลงแหล่งจ่ายกระแสเป็นแรงดันไฟฟ้าต่ออนุกรมกับโหลดที่ขนานกับแหล่งจ่ายเดิมนั้น ซึ่งจะเป็นแหล่งจ่ายที่ต่ออนุกรมกับโหลดที่เป็น RCRL แล้วแปลงแรงดันไฟฟ้าเป็นแหล่งจ่ายกระแสต่อขนานกับโหลดทั้งหมด เป็น RCRL//L//RC แล้วใช้ Current divider หาค่ากระแสที่ต้องการ

$$V_{S1} = 4\angle 90(4 - 3j) = 20\angle 53^\circ$$

$$RCRL = 4 - 3j + 2 + j = 6 - 2j$$

$$I_{S1} = \frac{V_{S1}}{6-2j} = 3.162\angle 71.43^\circ$$

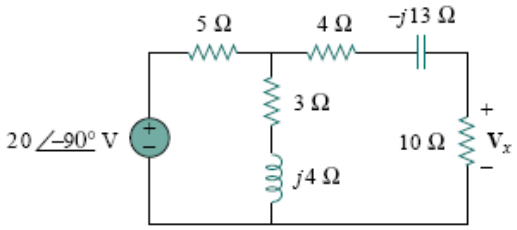
$$I_O = \frac{I_{S1}(RCRL \,//\, L \,//\, RC)}{RC} = \frac{3.162\angle 71.43(1.892-1.351j)}{1-2j}$$

$$= \frac{3.162\angle 71.43 \times 2.325\angle -35.53}{2.236\angle -63.43}$$

$$= 3.288\angle 99.33^\circ$$

Example

Determine V_x



Mesh analysis can be ignored by easier method such source transformation

First voltage source is transformed to be a current source paralleled to R 5 Ohms and a series of 3 and 4j. Then the current source is converted into voltage source series with the paralleled loads. Finally only one loop is obtained. This process suits this circuit because the answer is at the right end of the circuit similar to the above example. The calculations are shown in the followings:

$I_{S1} = (20\angle -90)/5 = 4\angle -90$ parallels to

$R_{P1} = 5 \,//\, (3+4j) = 2.5 + 1.25j$

$V_{S1} = I_{S1}R_{P1} = 4\angle -90 \times (2.5+1.25j) = 5 - 10j$

$$I_X = \frac{V_{S1}}{R_{P1}+4-13j+10} = 0.487 - 0.259j = 0.552\angle -27.98^\circ$$

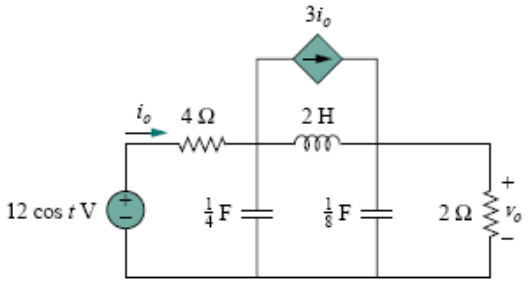
$V_X = I_X 10 = 5.52\angle -27.98^\circ$

7.5 วงจรสมมูลเทวินินและนอร์ตัน (Thevenin's and Norton equivalent circuits)

เป็นการวิเคราะห์ที่ไม่มีความต่างจากที่ผ่านมาในวงจรไฟฟ้ากระแสตรงเพียงแต่จะต้องคำนึงว่าเป็นการวิเคราะห์ที่โดเมนความถี่ ซึ่งถ้ามีการใช้แหล่งจ่ายในนวงจรที่มีความถี่มากกว่าหนึ่ง วงจรสมมูลทั้งสองแบบนี้ก็จะต้องมีที่แต่ละความถี่ด้วยซึ่งอาจจะเป็นไปได้ที่จะจัดเป็นรูปทั่วไปที่ติดค่าตัวแปรความถี่หรืออัตราเร็วเชิงมุมไว้ถ้ามีค่าความถี่ที่ใช้ในวงจรมากๆ แต่ถ้าไม่มากก็แสดงวงจรสมมูลที่ทุกๆ ความถี่ตามความเหมาะสม

จากวงจรเชิงเส้นใดๆ สามารถแทนด้วยแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากับโหลดที่เทียบเคียงได้กับค่าความต้านทานภายในของวงจร ซึ่งวงจรเทียบเคียงนี้มีชื่อเรียกว่า Thevenin's equivalent circuit ดังรูปซ้ายมือ และในทำนองเดียวกัน ก็สามารถแทนด้วยแหล่งจ่ายกระแสหนึ่งแหล่งกับค่าโหลดที่มีค่าเท่ากันกับค่าโหลดของ Thevenin's equivalent circuit วงจรเทียบเคียงทางขวามือมีชื่อว่า Norton's equivalent circuit ซึ่งทั้งสองวงจรนี้สามารถแปลงกลับไปมาได้จากหลักการของ Source transformation โดยมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$V_{TH} = Z_{TH} I_N \qquad Z_{TH} = Z_N$$



ตัวอย่าง จงหาค่า v_o โดยวิธี วงจรสมมูล Thevenin

จากวงจรซึ่งเป็นวงจรที่มี Dependent source ดังนั้นในการหาค่า Impedance เทียบเคียงหาได้จาก แรงดันวงจรเปิดที่ output terminal จากการวิเคราะห์โหนดที่โหนด1

$$\frac{12-V_1}{4}+\frac{V_1}{-4j}+\frac{V_1-V_2}{2j}+3I_O=0$$

$$(4+j)V_1-2jV_2=48\angle 0^\circ \qquad (1)$$

โหนดที่2

$$\frac{V_2-V_1}{2j}+\frac{V_2}{-8j}-3I_O=0$$

$$-3jV_2+(6+4j)V_1=72\angle 0 \qquad (2)$$

(1)(6+4j)-(2)(4+j)

$$5V_2=120j$$

$$V_2=V_{OC}=24j=24\angle 90^\circ$$

ปิดวงจรที่ Output terminal แล้วหาค่ากระแสที่ไหลผ่าน โดยใช้ การวิเคราะห์ที่โหนด1 โหนดที่2 โดน short ลงที่กราวด์

$$\frac{12-V_1}{4}+\frac{V_1}{-4j}+\frac{V_1}{2j}+3I_O=0$$

$$V_1=\frac{48}{4+j}=11.29+2.82j=11.64\angle -14.04^\circ$$

$$I_{SC}=3I_O+\frac{V_1}{2j}=\frac{3\left(12-11.64\angle -14.04^\circ\right)}{4}+\frac{11.64\angle -14.04^\circ}{2j}$$

$$=-0.881-3.528j=3.636\angle -104.02^\circ$$

ค่า Impedance ของวงจรเทียบเคียงสามารถหาได้โดย

$$Z_{TH}=\frac{V_{OC}}{I_{SC}}=\frac{24\angle 90}{3.636\angle -104.02}=6.6\angle 194.02^\circ=-6.403-1.599j$$

คำนวณค่ากระแสที่ Output

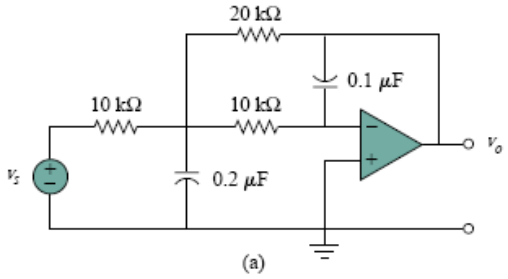
$$I_O=\frac{V_{OC}}{Z_{TH}+2}=\frac{24\angle 90}{-4.403-1.599j}=-1.749-4.816j=5.123\angle -109.96^\circ$$

$$V_0=2I_O=10.246\angle -109.96^\circ$$

$$v_O(t)=10.246\cos(t-109.96^\circ)$$

7.6 วงจร Op-amp

ในการวิเคราะห์วงจรที่ประกอบด้วย Operational amplifier (Op-amp) นั้นเป็นลักษณะทางกายภาพของแหล่งจ่ายที่ไม่เป็นอิสระ เพราะ Output นั้นจะเป็นการขยายหรือเป็นผลคูณกับค่าที่ขา Input และในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับนั้นก็ยังอาศัยหลักการของการวิเคราะห์ที่โดเมนความถี่เหมือนกับตัวอย่างที่ได้กล่าวมาแล้วจากส่วนก่อนหน้านี้ และเพื่อเป็นการลดขั้นตอนและความซับซ้อนในการวิเคราะห์วงจรจะยึดหลัก 2 ประการคือ Op-amp จะถูกประมาณด้วยการพิจารณาเป็น Ideal Op-amp คือที่ทั้งสองขา inverter and noninverter จะไม่มีกระแสไฟฟ้าไหลเข้าและไม่มีความต่างศักย์ระหว่างกันขา Input ทั้งสอง (เป็นศูนย์)



ตัวอย่าง จงหาค่าแรงดันไฟฟ้าขาออก ถ้าแรงดันไฟฟ้าขาเข้าเป็น $3\cos 1000t$ v

เปลี่ยนวงจรให้ทุกส่วนเป็นเฟสเซอร์และใช้การวิเคราะห์วงจรในโดเมนของความถี่

ใช้การวิเคราะห์โหนด

Node1

$$\frac{V_1 - 3\angle 0}{10k} + \frac{V_1 - V_O}{20k} + \frac{V_1 - V_2}{10k} + \frac{V_1}{-j5k} = 0$$

$V_2 = 0$ จาก ideal op-amp

$$(5 + 4j)V_1 - V_O = 6\angle 0 \qquad (1)$$

Node2

$$\frac{0 - V_1}{10k} + \frac{0 - V_0}{-j10k} = 0$$

$$V_1 = -jV_O \qquad (2)$$

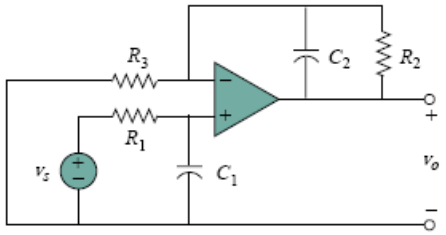
แทนค่าจาก (2) ใน (1)

$$(3 - 5j)V_O = 6\angle 0$$

$$V_O = \frac{6\angle 0}{(3 - 5j)} = 0.529 + 0.882j = 1.03\angle 59.04^\circ$$

$$v_O = 1.03\cos(1000t + 59.04^\circ) \text{ Volts}$$

ตัวอย่าง Determine voltage gain of the following circuit.



ใช้การวิเคราะห์โหนด

ที่โหนด +

$$\frac{V_+ - V_S}{R_1} + j\omega_S C_1 V_+ = 0$$

$$V_+ = \frac{V_S}{1 + j\omega_S R_1 C_1}$$

ที่โหนด -

$$\frac{V_-}{R_3} + \frac{V_- - V_0}{R_2} + j\omega_S C_2 (V_- - V_0) = 0$$

$$R_2 V_- + (R_3 + j\omega_S R_2 R_3 C_2)(V_- - V_0) = 0$$

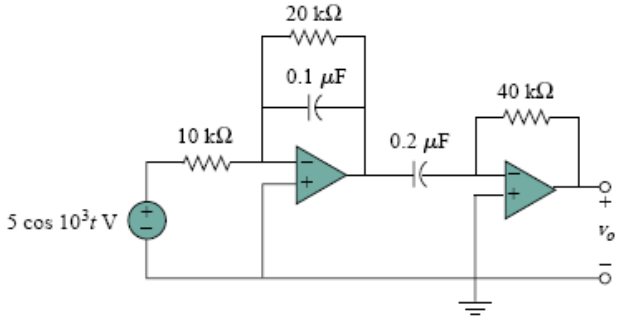
$$\frac{(R_2 + R_3 + j\omega_S R_2 R_3 C_2)V_-}{R_3 + j\omega_S R_2 R_3 C_2} = V_0$$

โดยที่ op-amp เป็นแบบ ideal ดังนั้น $V_- = V_+$ และ voltage gain จะได้เป็น

$$\frac{(R_2 + R_3 + j\omega_S R_2 R_3 C_2)}{R_3 + j\omega_S R_2 R_3 C_2} \frac{V_S}{1 + j\omega_S R_1 C_1} = V_0$$

$$\frac{V_0}{V_S} = \frac{(R_2 + R_3 + j\omega_S R_2 R_3 C_2)}{(R_3 + j\omega_S R_2 R_3 C_2)(1 + j\omega_S R_1 C_1)}$$

ทั้งขนาด Voltage gain และมุมที่เปลี่ยนไป



Example Determine the output voltage of the circuit on the left hand side.

Using KCL at the inverter of the first op-amp (with the ideal op-amp $V_{-1} = 0$)

$$\frac{0-5}{10k}+\frac{0-V_{O1}}{20k}+j0.1m\left(0-V_{O1}\right)=0$$

$$-10-V_{O1}-j2V_{O1}=0$$

$$V_{O1}=\frac{10}{-1-2j}=-2+4j=4.472\angle 116.57^{\circ}$$

At the inverter of the second op-amp with KCL and ideal op-amp, $V_{-2} = 0$, then

$$j0.2m(0-V_{O1})+\frac{0-V_O}{40k}=0$$

$$V_O=-8j(-2+4j)=32+16j=35.78\angle 26.57^{\circ}$$

$$v_O=35.78\cos\left(10^3t+26.57^{\circ}\right)\ \text{Volts}$$