บทที่ 8 สนามที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาและสมการของ Maxwell

วัตถุประสงค์

8.1 กฎของ Faraday

จากการข้นพบว่ากระแสเหนี่ยวนำเข็มทิศได้ซึ่งก็เป็นการบอกว่ากระแสสามารถกำเนิดสนามแม่เหล็กดังนั้น Faraday จึงกล่าวว่าถ้ากระแสเหนี่ยวนำทำให้เกิดสนามแม่เหล็กได้แล้วดังนั้นในทางกลับกันสนามแม่เหล็กก็น่าจะเหนี่ยวทำให้เกิดกระแสได้ และได้ทำการทดลองตามสมมติฐาน (ในตอนนั้น) ด้วยการใช้ขดลวดสองวงจรโดยที่วงจรที่หนึ่งต่อกับแบตเตอรี่อีกวงจรหนึ่งต่อกับมิเตอร์ แล้วทำการเลื่อนขดลวดออกจากกันพบว่ามิเตอร์มีการกระดิกซึ่งเป็นการยืนยันว่าเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงเส้นแรงแม่เหล็กจะเหนี่ยวนำทำให้เกิดแรงทางไฟฟ้า

ในเทอมของสนามแม่เหล็ก ในการเปลี่ยนแปลงสนามแม่เหล็กตามเวลาจะเป็นการสร้าง emf (electromotive force) ซึ่งจะเห็นได้จากกระแสที่ตัวนำที่เป็นวงจรปิด เป็นการกล่าวเพิ่มเติมว่า ค่า emf ได้จากการเคลื่อนที่ของเส้นทางเดินตัวนำปิดหรือขดลวดหรือการเปลี่ยนเส้นแรงแม่เหล็กที่ผ่านตัวนำปิดนั้น และจากกฎของ Faraday สามารถได้ความสัมพันธ์เป็น

$$emf = \frac{-d\Phi}{dt}$$

เส้นแรงแม่เหล็กในสมการข้างต้นนิยามเป็นเส้นแรงที่ผ่านพื้นที่ในตัวนำปิดหรือขดลวด โดยที่อัตราการเปลี่ยนแปลงต่อเวลาในสมการข้างต้นเป็นค่าการเปลี่ยนแปลงค่าเส้นแรงแม่เหล็กดังกล่าวในบริเวณที่นิยามไว้แล้ว

ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของเส้นแรงแม่เหล็กอาจจะได้จาก

1. การเปลี่ยนแปลงของเส้นแรงแม่เหล็กที่ผ่านขดลวดที่ต้องการ Linkage Flux
2. การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของเส้นลวดตัวนำปิดหรือขดลวดกับสนามแม่เหล็กที่คงที่
3. ทั้งสองกรณีรวมกัน

เครื่องหมายลบได้จากได้จากกรณีที่เป็นการเพิ่มเส้นแรงแม่เหล็กโดยที่ emf จะเป็นแรงที่จะสร้างกระแสในขดลวดที่จะเหนี่ยวนำให้เส้นแรงแม่เหล็กซึ่งจะมีทิศทางที่ตรงกันข้ามกับทิศทางของเส้นแรงแม่เหล็กที่เพิ่มขึ้น (ในพื้นที่ที่พิจารณา) ในการสร้างเส้นแรงที่ตรงข้ามนี้เรียกว่ากฎของ Lenz

แต่ถ้าเป็นเส้นแรงแม่เหล็กที่ประกอบด้วยจำนวนของตัวนำในลักษณะขดลวด N

$$emf = N\frac{-d\Phi}{dt}$$

จากที่ผ่านมาแล้วในกรณีของสนามไฟฟ้าจะเห็นได้ว่า emf สามารถหาได้จาก

$$emf = \oint \overline{E}\cdot d\overline{L}$$

และค่านี้เป็นค่าค่าแรงดันไฟฟ้าที่เส้นทางเดินปิด ถ้าส่วนใดส่วนหนึ่งของเส้นทางเดินปิดเปลี่ยนโดยทั่วไป emf จะเปลี่ยน แต่ก่อนนั้นการอินทิเกรตนี้จะมีค่าเป็นศูนย์ ถ้าเป็นสนามเป็นค่าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา จะส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของค่า emf หรือ voltage

แทนค่าเส้นแรงแม่เหล็กด้วยความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กจึงได้ว่า

$$emf = \oint \overline{E}\cdot d\overline{L} = -\frac{d}{dt}\int_S \overline{B}\cdot d\overline{S}$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้นและจาก Stroke's Theorem

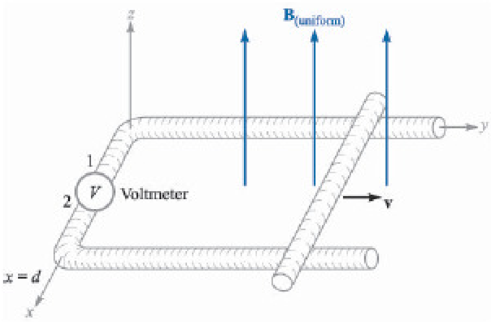
$$emf = \oint_S \nabla\times\overline{E}\cdot d\overline{S} - \frac{d}{dt}\int_S \overline{B}\cdot d\overline{S}$$

จึงได้ว่า

$$\nabla\times\overline{E} = -\frac{d\overline{B}}{dt}$$

จากที่เราได้พิจารณาในกรณีของ สนามสถิตย์คือสนามแม่เหล็กไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาหรือไม่เป็นฟังก์ชันของเวลาที่ผ่านมา คือ $\oint \overline{E}\cdot d\overline{L} = 0$ และ $\nabla\times\overline{E} = 0$ (Electrostatics)

ลองพิจารณากรณีที่สนามแม่เหล็กคงที่และเป็นการเคลื่อนที่ของขดลวดหรือเส้นตัวนำที่เป็นเส้นปิด ยกตัวอย่างก่อนที่จะเป็นการวิเคราะห์ด้วยกฎของ Faraday



สนามแม่เหล็กมีค่าคงที่แต่เส้นตัวนำมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว ดังรูป จะเห็นได้ว่าเส้นแรงแม่เหล็กที่ผ่านเส้นทางปิดสามารถหาได้จาก

$$\Phi = Byd$$

และจาก

$$emf = \frac{-d\Phi}{dt} = -Bd\frac{dy}{dt} = -Bdv$$

จาก Lenz's Law จะเห็นได้ว่าค่าเส้นแรงจะมีค่าเพิ่มขึ้นถ้าเส้นตัวนำที่เคลื่อนที่ออกไป ดังนั้นค่าที่จะปรากฏที่โวลต์มิเตอร์ถ้าอ่านเป็น V_{12} จึงมีค่าเป็นลบ ซึ่งที่ 1 เป็นขั้ว – 2 เป็นขั้ว + และมีค่าเท่ากับค่า emf

ย้อนกลับไปที่แรงในการเคลื่อนประจุไฟฟ้า ซึ่งก็เป็นค่า Motional emf มีค่าเป็น

$$\overline{F} = Q\overline{v} \times \overline{B}$$

ซึ่งจะนิยามอัตราส่วนของ Motional emf ต่อหนึ่งหน่วยประจุไฟฟ้า คือ motional electric field intensity

$$\overline{E}_m = \overline{v} \times \overline{B}$$

ค่า emf จากการเคลื่อนที่ของขดลวด

$$emf = \oint \overline{E}_m \cdot d\overline{L} = \oint \overline{v} \times \overline{B} \cdot d\overline{L}$$

จากสมการข้างต้นพร้อมกับรูปของการเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ที่แสดงในรูปด้านบน จะเห็นได้ว่า ค่า emf ที่ได้ไม่เป็น 0 คือ อินทิเกรตที่ส่วนตัวนำที่เคลื่อนที่เท่านั้น คือ

$$emf = \oint \overline{v} \times \overline{B} \cdot d\overline{L} = \int_d^0 \overline{v} \times \overline{B} \cdot dx\overline{a}_x = -vBd$$

ถ้ามีการรวมทั้งค่าเส้นแรงแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามสนามที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาและการเคลื่อนที่ของขดลวดมีส่วนร่วมกันที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนเส้นแรงแม่เหล็กในเส้นทางปิดส่งผลให้

$$emf = \oint \overline{E} \cdot d\overline{L} = -\int_S \frac{d\overline{B}}{dt} \cdot d\overline{S} + \oint \overline{v} \times \overline{B} \cdot d\overline{L}$$

แต่อย่างไรก็ตามค่า emf ก็ยังอยู่ที่

$$emf = -\frac{d\Phi}{dt}$$

และก็ใช้ในการหาค่าแรงดันไฟฟ้าที่ได้จากการเหนี่ยวนำ (Induced voltage)

ตัวอย่าง ในพื้นที่หนึ่งมีค่า ซึ่งตัวกลางมีค่า permittivity และค่า permeability เท่ากับ $\varepsilon = 10^{-11}$ F/m และ $\mu = 10^{-5}$ H/m ตามลำดับ กำหนดให้ ความหนาแน่นสนามแม่เหล็ก $B_x = 2\times10^{-4}\cos10^5 t \sin10^{-3} y$ T

(a) จาก $\nabla \times \overline{E} = -\dfrac{d\overline{B}}{dt}$

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{d\overline{B}}{dt} = 20\sin10^5 t \sin10^{-3} y\overline{a}_x$$

$$\overline{a}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = 20\sin10^5 t \sin10^{-3} y\overline{a}_x$$

แต่องค์ประกอบในแนวแกน Y มีค่าเป็นค่าคงที่จึงละได้

$$E_z = \int 20\sin 10^5 t \sin 10^{-3} y dy$$
$$= -20000\sin 10^{5t} \cos 10^{-3} y$$

(a) จาก $\nabla \times \overline{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t}$ จงหาค่าความเข้มสนามไฟฟ้า (ความสัมพันธ์นี้จะกล่าวอีกครั้งในหัวข้อต่อไป)

$$\nabla \times \overline{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \overline{B} = -20\times 10^{-3}\cos 10^5 t \cos 10^{-3} y\overline{a}_z = \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$$

$\overline{E} = \int -20\times 10^8 \cos 10^5 t \cos 10^{-3} y\overline{a}_z dt = -20000\sin 10^5 t \cos 10^{-3} y\overline{a}_z$ V/m

(b) หาค่าเส้นแรงแม่เหล็กรวมที่ผ่านพื้นผิวที่ x = 0; 0<y<400 m;0<z<2 m และที่เวลา t = 1 micro-second

พื้นผิวมีเวกเตอร์ที่ตั้งฉากคือ $\overline{a}_x$ ดังนั้นเส้นแรงแม่เหล็กที่พื้นผิวนี้หาได้จาก

$$\Phi = \int_S \overline{B}\cdot d\overline{S} = \int_S 2\times 10^{-4}\cos 10^5 t \sin 10^{-3} y\overline{a}_x \cdot dydz\overline{a}_x$$
$$= \int_0^2 \int_0^{400} 2\times 10^{-4}\cos 10^5 t \sin 10^{-3} ydydz$$
$$= -\frac{2\times 10^{-4}}{10^{-3}}\cos 10^5 t \cos 10^{-3} y\Big|_0^{400} z\Big|_0^2$$

= 31.4 mWb

(c) จงหาค่า $\oint \overline{E}\cdot d\overline{L}$ รอบพื้นผิวจากข้อที่ผ่านมา

จะสนามไฟฟ้าเป็นเวกเตอร์ที่มีองค์ประกอบเป็น z เท่านั้น ดังนั้น เหลือด้านที่จะหาอยู่สองด้านคือ

$$\oint \overline{E}d\overline{L} = -20000\sin 10^5(1\mu)\cos 10^{-3}(400)\overline{a}_z \cdot 2\overline{a}_z$$
$$-20000\sin 10^5(1\mu)\cos 10^{-3}(0)\overline{a}_z \cdot 2(-\overline{a}_z)$$

= 315 V (ข้อสังเกตเพิ่มเติมคือ ผลของการอินทิเกรตไม่เป็นศูนย์เหมือนกรณีที่เป็นสนามไฟฟ้าสถิตย์)

ตัวอย่าง บาร์ที่เลื่อนได้เหมือนรูปที่แสดงไว้ก่อนหน้ากำหนดให้เส้นบาร์ยาว 7 cm $\overline{B} = 0.3\overline{a}_z$ T และ $\overline{v} = 0.1e^{20y}\overline{a}_y$ m/s กำหนดให้ y = 0 t = 0

(a) จงหาความเร็วของบาร์ที่เวลา t = 0

$\overline{v} = 0.1$ m/s

(b) หาตำแหน่งของบาร์ที่เวลา t = 0.1 second เนื่องจาก ความเร็วเป็นความเร็วในแนวแกน y เท่านั้น ดังนั้น

$v = \dfrac{dy}{dt} = 0.1e^{20y}$ ทำการอินทิเกรตแยกตัวเป็น

$\int \dfrac{dy}{e^{20y}} = \int 0.1dt$ และมีเงื่อนไขที่สถานะเริ่มต้นด้วยดังนั้น

$$-\frac{e^{-20y}}{20} + C_1 = 0.1t + C_2$$

ที่ t = 0 จะได้ y = 0 จึงได้

$$0.1t + \frac{e^{-20y}}{20} + C = 0$$

$C = -0.05$ และจะได้สมการบอกตำแหน่งเป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น

$$y(t) = \frac{-1}{20}\ln\left(20(0.05 - 0.1t)\right)$$

ที่เวลา t = 0.1 s บาร์จะอยู่ที่ตำแหน่ง

$$y(0.1) = \frac{-1}{20}\ln\left[20(0.05 - 0.1(0.1))\right] = -0.01116$$

= 1.116 cm

(c) หาค่าความเร็วที่เวลา t = 0.1 s

$$v = 0.1e^{20(0.01116)} = 0.125 \text{ m/s}$$

(d) ค่าศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้น V_{12} ที่เวลา t = 0.1 s

$$V_{12} = emf = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bdv(t) = -0.3\times 0.07\times 0.125 = -0.002625 \text{ v}$$

8.2 Displacement current

จากกฎของ Faraday's การเปลี่ยนแปลงเส้นแรงแม่เหล็กจะเหนี่ยวนำให้เกิด emf และสมการของ Maxwell ข้อที่ 2 จะได้เป็นอีกรูปที่ไม่เป็นศูนย์เช่นในสนามไฟฟ้าสถิตย์

$$\nabla\times\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{dt}$$

ซึ่งก็มีความหมายว่าการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กเป็นฟัวก์ชันของเวลาจะเหนี่ยวนำทำให้เกิดสนามไฟฟ้า และจำไว้ว่ามันเป็นการอินทิเกรตเชิงเส้นของสนามไฟฟ้าบนเส้นทางปิด และ curl ของมันเป็นการอินทิเกรตเช้งผิวไม่เป็นศูนย์กรณีเปลี่ยนแปลงตามเวลา และจะลองพิจารณากรณีที่สนามไฟฟ้าเปลี่ยนแปลง(เป็นฟังก์ชันของเวลา)

จากการประยุกต์ใช้งานกฎของแอมแปร์ในกรณีที่สนามแม่เหล็กคงที่ (สมการข้อที่ 3 ขอฃ Maxwell) และ Curl

$$\nabla\times\overline{H} = \overline{J} \text{ และ จาก}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\overline{H} \equiv 0 = \nabla\cdot\overline{J}$$

และจาก กฎของแอมแปร์ Curl และ divergence จะได้

$$\oint\overline{H}\cdot d\overline{L} = \int_S \nabla\times\overline{H}\cdot d\overline{S} = \int_S \overline{J}\cdot d\overline{S} = I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_v dv$$

$$\int_V \nabla\cdot\overline{J}dv = -\int_V \frac{\partial\rho_v}{\partial t}dv$$

$$\nabla\cdot\overline{J} = -\frac{\partial\rho_v}{\partial t}$$

จะเห็นได้ว่าสมการข้างต้นก่อนหน้าเป็น ศูนย์ เมื่อ ความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าต่อปริมาตรมีค่าคงที่หรือไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนั้น ถ้าความหนาแน่นประจุไฟฟ้าต่อปริมาตรเป็นฟังก์ชันของเวลาแล้ว

$$\nabla\times\overline{H} = \overline{J} + \overline{G}$$

ดังนั้น แล้ว

$$0 = \nabla\cdot\overline{J} + \nabla\cdot\overline{G} \text{ และ}$$

$$\nabla\cdot\overline{G} = \frac{\partial\rho_v}{\partial t}$$

จาก Divergence Theorem ของความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าจะได้ว่า (สมการที่ 1 Maxwell) $\nabla\cdot\overline{D} = \rho_v$ ดังนั้น

$$\nabla\cdot\overline{G} = \frac{\partial\nabla\cdot\overline{D}}{\partial t} = \nabla\cdot\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}$$

$$\overline{G} = \frac{\partial\overline{D}}{\partial t} \text{ มีหน่วยเป็น A/m}^2$$

จะเห็นได้ว่าเป็นการพิจารณาสนามไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันของเวลานั่นเอง

$$\nabla\times\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial\overline{D}}{\partial t}$$

จะเห็นว่าสมการที่ 3 Maxwell ก็มีส่วนเพิ่มขึ้นมาจากการที่สนามไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งจากสมการข้างบนนี้จะนิยามสอดคล้องกันเป็น displacement current density $\overline{J}_d = \dfrac{\partial \overline{D}}{\partial t}$

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} + \overline{J}_d$$

อย่างไรก็ตาม ค่า current density ก็ยังเป็นค่าที่ได้จากการเปลี่ยนแปลงหรือการเคลื่อนที่ของประจุอิสระ คือ

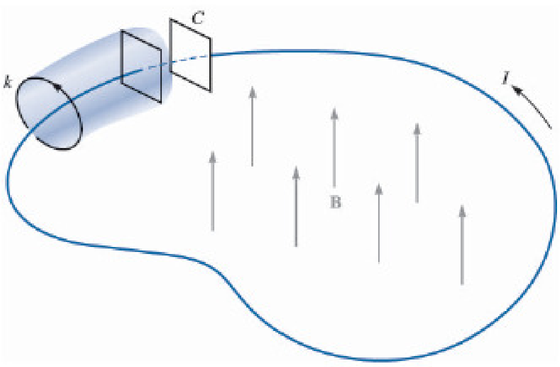
$$\overline{J} = \sigma \overline{E} = \rho_v \overline{v}$$

ดังนั้น ค่า displacement current ก็สามารถหาได้จากการอินทิเกรตบนพื้นที่ที่กำหนดได้และจากสมการของกฎของแอมแปร์

$$\oint \overline{H} \cdot d\overline{L} = \int_S \nabla \times \overline{H} \cdot d\overline{S} = \int_S \overline{J} \cdot d\overline{S} + \int_S \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \cdot d\overline{S}$$

$$\oint \overline{H} \cdot d\overline{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \cdot d\overline{S}$$

เกิดคำถามขึ้นมากว่า ลักษณะของ displacement current คืออะไรพบได้ที่ไหน ตัวอย่างข้างล่างจะทำให้เข้าใจนิยามของ displacement current ได้มากขึ้น



จากรูปซ้ายมือ เป็นตัวนำที่ต่อกับแผ่นเก็บประจุ ภายในลูปปิดนี้สนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นฟังก์ชันไซน์ ทำให้เกิดเป็น emf เป็น

$$emf = V_O \cos \omega t$$

จากการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า

ซึ่งจะได้กระแสจาก $\left(I = C\dfrac{dV}{dt} \right)$

$$I = -\omega C V_O \sin \omega t$$

$$= -\omega \frac{\varepsilon S}{d} V_O \sin \omega t$$

ที่ตัวนำจากกฎของแอมแปร์โดยที่ตัด Displacement current จะได้

$\oint_k \overline{H} \cdot d\overline{L} = I_k$ ซึ่งจะเป็นกระแสที่เรียกว่า Conducting current เกิดจากการเคลื่อนที่ของประจุไฟฟ้า

ส่วนที่คาปาซิเตอร์จะเกิดเส้นแรงไฟฟ้าที่มีความหนาแน่นเป็น

$$D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{V}{d} = \varepsilon \frac{V_O \cos \omega t}{d}$$

$$I_d = \overline{J}_d S = \frac{\partial D}{\partial t} S = \frac{\varepsilon S}{d} V_O \frac{d \cos \omega t}{dt} = -\omega C V_O \sin \omega t$$

จะเห็นได้ว่า ค่าของกระแสทั้งกระแสที่ไหลในตัวนำจากการเคลื่อนที่ของประจุอิสระในเส้นตัวนำ ซึ่งมีชื่อเรียกที่สอดคล้องกับคุณลักษณะของการเกิด คือ Conducting current และกระแสที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าในคาปซิเตอร์ (ในฉนวนไฟฟ้าซึ่งไม่มีประจุไฟฟ้า) คือ Displacement current ทั้งสองมีค่าเท่ากันในกรณีตัวอย่างนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าขนาดของ Displacement current density

(a) สายอากาศที่ของมือถือที่วางอยู่ใกล้กันโดยที่สนามแม่เล็กของสัญญาณ FM เป็น

$H_x = 0.15 \cos\left[2.12\left(3 \times 10^8 t - y\right)\right]$ A/m

ในกรณีนี้กระแสของประจุอิสระเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} + \overline{J}_d = \overline{J}_d$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y}\overline{a}_z = -0.318\sin\left[2.12\left(3\times10^8 t - y\right)\right]\overline{a}_z$$

ขนาดของ Displacement current density คือ 0.318 A/m^2

(b) ใน Free-space ภายในหม้อแปลงมีค่าความหนาแน่นสนามแม่เหล็กเป็น

$\overline{B} = 0.8\cos\left[1.257\times10^{-6}\left(3\times10^8 t - x\right)\right]\overline{a}_y$ Tesla ซึ่งจะได้ สนามไฟฟ้าจากการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจากความสัมพันธ์ $\nabla\times\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}$ จากที่ความหนาแน่นสนามแม่เหล็กมีแต่องค์ประกอบในแกน y จึงได้เป็น

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0.8\cos\left[1.257\times10^{-6}\left(3\times10^8 t - x\right)\right]$$ จะเห็นว่า E_x เป็นค่าคงที่

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0.8\times1.257\times300\cos\left[1.257\times10^{-6}\left(3\times10^8 t - x\right)\right]$$

$$E_z = -\int 0.8\times1.257\times300\cos\left[1.257\times10^{-6}\left(3\times10^8 t - x\right)\right]dx$$

$$= -0.8\times3\times10^8\sin\left[1.257\times10^{-6}\left(3\times10^8 t - x\right)\right]$$

$$\overline{J}_d = \frac{\partial\overline{D}}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}0.8\times3\times10^8\times1.257\times300\cos\left[1.257\times10^{-6}\left(3\times10^8 t - x\right)\right]\overline{a}_z$$

$$= 0.7999\cos\left[1.257\times10^{-6}\left(3\times10^8 t - x\right)\right]\overline{a}_z$$

ขนาดของ Displacement current density คือ 0.800 A/m^2

(c) ในโลหะที่มีค่า permittivity $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times10^{-9}$ F/m $\mu = \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m

$\sigma = 5.8\times10^7$ 1/(Ohm-m) และ $\overline{J} = \sin(377t - 117.1z)\overline{a}_x$ MA/m^2

จาก $\overline{J} = \sigma\overline{E}$ จะได้

$$\overline{E} = \frac{\sin(377t - 117.1z)\times10^6}{5.8\times10^7}a = \frac{1}{58}\sin(377t - 117.1z)$$

$$\overline{J}_d = \frac{\partial\overline{D}}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial\overline{E}}{\partial t} = \frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\frac{1}{58}377\sin(377t - 117.1z)\overline{a}_x$$

$$= 57.45\times10^{-12}\sin(377t - 117.1z)\overline{a}_x$$

ขนาดของ Displacement current density คือ 57.45 pA/m^2

8.3 สมการ Maxwell ในรูปของการเปลี่ยนแปลงตามเวลา

จากส่วนที่แล้วเป็นการพิจารณาสนามที่มีการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันของเวลาได้เป็น

$$\nabla\times\overline{E} = -\frac{\partial\overline{B}}{dt}$$ และ

$$\nabla\times\overline{H} = \overline{J} + \overline{J}_d$$

ซึ่งยังเหลือสองสมการคือ

$$\nabla\cdot\overline{D} = \rho_v$$ และ

$$\nabla\cdot\overline{B} = 0$$

ซึ่งก็ไม่มีการเปลี่ยนแปลงจากสมการแรกนั้นพิจารณาที่กฎของคูลอมบ์ในกรณีที่คูลอมบ์ใดๆ ถึงแม้จะเป็นการพิจารณาโดยจุดแต่ก็ยังพบว่า เส้นแรงไฟฟ้าก็มีการกระจายออกแบบ diverging จากตัวมันจึง ส่วนเส้นแรงแม่เหล็กอย่างที่รู้กันดีว่าประจุแม่เหล็กไฟฟ้าไม่มีสนามแม่เหล็กที่ปรากกฎโดยทั่วไปจะเป็นลักษณะเส้นปิดไม่มีจุดเริ่มหรือสิ้นสุดเส้นแรงแม่เหล็กไม่มีลักษณะการ diverging ออกจากแหล่งกำเนิด แต่อย่างไรก็ตามก็ยังมีการพิจารณาความเป็นฟังก์ชันของเวลาจากความสัมพันธ์

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \text{ และ}$$

$$\overline{B} = \mu \overline{H}$$

และ Conducting current

$$\overline{J} = \sigma \overline{E} = \rho_v \overline{v}$$

ส่วนกรณีที่เป็นวัสดุที่ผสมระหว่างตัวนำไฟฟ้าและฉนวนหรือสารจำพวก Semi-conductor จะได้วามสัมพันธ์ข้างต้นกระจายเป็น

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \overline{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \overline{E} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}$$

$$\overline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \overline{E} \text{ Polarisation}$$

ในกรณีของสารแม่เหล็ก

$$\overline{B} = \mu \overline{H} = \mu_0 \mu_r \overline{E} = \mu_0 (1 + \chi_m) \overline{H} = \mu_0 \overline{H} + \overline{M}$$

$$\overline{M} = \mu_0 \chi_m \overline{H} \text{ Magnetisation}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\sigma = 0$ และ $\rho_v = 0$ หาค่า k คงที่ โดยที่

(a) $\overline{E} = (Kx - 100t)\overline{a}_y$ และ $\overline{H} = (x + 20t)\overline{a}_z$ โดยที่ $\mu = 0.25$ H/m, $\varepsilon = 0.01$ F/m จาก

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \text{ เมื่อ } \sigma = 0 \text{ และ } \rho_v = 0$$

$$\nabla \times \overline{H} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \overline{a}_y = -1\overline{a}_y = \frac{\partial \varepsilon \overline{E}}{\partial t} = -1\overline{a}_y \text{ อีกความสัมพันธ์คือ}$$

$$\nabla \times \overline{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \overline{a}_z = K = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \mu \overline{H}}{\partial t} = -5 \text{ V/m}^2$$

(b) $\overline{D} = 5x\overline{a}_x - 2y\overline{a}_y + Kz\overline{a}_z \ \mu C / m^2$ และ $\overline{B} = 2\overline{a}_y$ mT โดยที่ $\mu = \mu_0$ และ $\varepsilon = \varepsilon_0$

จาก $\nabla \cdot \overline{D} = \rho_v = 0 = 5 - 2 + K$

$K = -3 \ \mu C / m^3$

(c) $\overline{E} = 0.6 \sin 10^6 t \sin 0.01z\overline{a}_x$ V/m และ $\overline{H} = 60 \cos 10^6 t \cos 0.1z\overline{a}_y$ A/m โดยที่ $\mu = K$ และ $\varepsilon = C_1$

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \text{ เมื่อ } \sigma = 0 \text{ และ } \rho_v = 0$$

$$\nabla \times \overline{H} = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \overline{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \overline{a}_x = K \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = K 0.6 \times 10^6 \cos 10^6 t \sin 0.01z\overline{a}_x$$

$$60 \times 0.01 \cos 10^6 t \sin 0.01z\overline{a}_x = K 0.6 \times 10^6 \cos 10^6 t \sin 0.01z\overline{a}_x$$

$$K = 10^{-6}$$

H/m

D10.4. Let $\mu = 10^{-5}$ H/m, $\epsilon = 4 \times 10^{-9}$ F/m, $\sigma = 0$, and $\rho_v = 0$. Find k (including units) so that each of the following pairs of fields satisfies Maxwell's equations: (*a*) $\mathbf{D} = 6\mathbf{a}_x - 2y\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$ nC/m^2, $\mathbf{H} = kx\mathbf{a}_x + 10y\mathbf{a}_y - 25z\mathbf{a}_z$ A/m; (*b*) $\mathbf{E} = (20y - kt)\mathbf{a}_x$ V/m, $\mathbf{H} = (y + 2 \times 10^6 t)\mathbf{a}_z$ A/m.

Ans. 15 A/m^2; -2.5×10^8 V/(m·s)

8.4 สมการ Maxwell ในรูปการอินทิเกรตของการเปลี่ยนแปลงตามเวลา

สมการ Maxwell อยู่ในรูปแบบของการอินทิเกรต จากส่วนที่ผ่านมาทั้งหมดแต่จะอยู่ในรูปของการเปลี่ยนแปลงตามเวลา จะถูกรวบรวมมาไว้ในส่วนนี้ ซึ่งได้กล่าวถึงความสัมพันธ์กับกฎและทฤษฎีต่าง

จากความสัมพันธ์ของStroke's Theorem ในการอินทิเกรตเชิงเส้นเป็นการอินทิเกรตเชิงผิวซึ่งจะทำให้ได้กฎของ Faraday

$$\oint \overline{E} \cdot d\overline{L} = \int_S \nabla \times \overline{E} \cdot d\overline{S} = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot d\overline{S}$$

และในทำนองเดียวกัน ในการอินทิเกรตสนามแม่เหล็กบนเส้นทางปิดจะทำให้ได้ความสัมพันธ์เป็นกฎ Ampere circuital Law

$$\oint \overline{H} \cdot d\overline{L} = \int_S \nabla \times \overline{H} \cdot d\overline{S} = \int_S \overline{J} \cdot d\overline{S} + \int_S \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \cdot d\overline{S} = I + \int_S \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \cdot d\overline{S}$$

กฎของ Gauss จะเป็นการ อินทิเกรตความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าและเส้นแรงแม่เหล็ก ร่วมกับทฤษฎี Divergence จะทำให้ได้

$$\oint_S \overline{D} \cdot d\overline{S} = \int_{vol} \nabla \cdot \overline{D} dv = Q = \int_{vol} \rho_v dv$$

$$\oint_S \overline{B} \cdot d\overline{S} = \int_{vol} \nabla \cdot \overline{B} dv = 0$$

จากสมการทั้งสี่นี้ จะมีการเชื่อมต่อไปการอินทอเกรตสู่การพิจราณาเงื่อนไขของขอบเขตระหว่างวัสดุของทั้งสนามและความหนาแน่นเส้นแรงแม่เหล็กและไฟฟ้า $\left(\overline{E}, \overline{D}, \overline{H}, \overline{B}\right)$ ซึ่งโดยทั่วไปที่ผิวของวัสดุทางกายภาพ ค่าความหนาแน่นกระแสผิว $\overline{K}$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตจึงได้เป็น

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตในแนวตั้งฉากนั้นจะได้เป็น

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_S$$

$$B_{N1} = B_{N2}$$

D10.5. The unit vector $0.64\mathbf{a}_x + 0.6\mathbf{a}_y - 0.48\mathbf{a}_z$ is directed from region 2 ($\epsilon_R = 2, \mu_R = 3, \sigma_2 = 0$) toward region 1 ($\epsilon_{R1} = 4, \mu_{R1} = 2, \sigma_1 = 0$). If $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z)\sin 300t$ T at point P in region 1 adjacent to the boundary, find the amplitude at P of: (*a*) $\mathbf{B}_{N1}$; (*b*) $\mathbf{B}_{t1}$; (*c*) $\mathbf{B}_{N2}$; (*d*) $\mathbf{B}_2$.

Ans. 2.00 T; 3.26 T; 2.00 T; 5.15 T

(a)

$$\overline{B}_{N1} = \overline{B}_1 \cdot \overline{a}_N$$

$$= \left(\overline{a}_x - 2\overline{a}_y + 3\overline{a}_z\right) \cdot \left(0.64\overline{a}_x + 0.6\overline{a}_y - 0.48\overline{a}_z\right) \times \left(0.64\overline{a}_x + 0.6\overline{a}_y - 0.48\overline{a}_z\right)$$

$$= -2\left(0.64\overline{a}_x + 0.6\overline{a}_y - 0.48\overline{a}_z\right)$$

$$\left|\overline{B}_{N1}\right| = 2.00 \text{ T}$$

(b)

$$\overline{B}_1 = \overline{B}_{N1} + \overline{B}_{t1}$$

$$\overline{B}_{t1} = \overline{B}_1 - \overline{B}_{N1} = \left(\overline{a}_x - 2\overline{a}_y + 3\overline{a}_z\right) + 2\left(0.64\overline{a}_x + 0.6\overline{a}_y - 0.48\overline{a}_z\right)$$
$$= 2.28\overline{a}_x - 0.8\overline{a}_y + 2.04\overline{a}_z$$

$\left|\overline{B}_{t1}\right| = 3.16$ T

(c) $B_{N1} = B_{N2}$

$\left|\overline{B}_{N2}\right| = 2.00$ T

(d) จาก $H_{t1} = H_{t2}$

$$\overline{B}_{t2} = \mu_2 \frac{\overline{B}_{t1}}{\mu_1} = \mu_0\mu_{R2} \frac{\overline{B}_{t1}}{\mu_0\mu_{R1}}$$
$$\overline{B}_{t2} = 1.5(2.28\overline{a}_x - 0.8\overline{a}_y + 2.04\overline{a}_z)$$
$$\overline{B}_2 = \overline{B}_{N1} + \overline{B}_{t2} = -2\left(0.64\overline{a}_x + 0.6\overline{a}_y - 0.48\overline{a}_z\right) + 1.5(2.28\overline{a}_x - 0.8\overline{a}_y + 2.04\overline{a}_z)$$
$$= 2.14\overline{a}_x - 2.4\overline{a}_y + 4.02\overline{a}_z$$

$\left|\overline{B}_2\right| = 5.148$ T

Introduction to wave propagation

เป็นส่วนเพิ่มเติมเพื่อนำเข้าสู่เรื่องการกระจายคลื่นซึ่งเป็นบทประยุกต์ใช้สมการ Maxwell ที่ชัดเจนของแม่เหล็กไฟฟ้าที่สำคัญ โดยจะเริ่มที่การเคลื่อนที่ของคลื่นใน Free-space สมการ Maxwell ทั้งสี่สมการถูกจัดให้สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ อยู่ในรูปของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กได้เป็น

$$\nabla \times \overline{H} = \varepsilon_O \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \overline{E} = -\mu_O \frac{\partial \overline{H}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \overline{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \overline{H} = 0$$

นอกจากพิกัดของระบบสามมิติแล้วสนามทั้งแม่เหล็กและไฟฟ้าก็ยังมีอีกหนึ่งตัวแปรคือเวลา ดังนั้นสนามจะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรทั้งสี่ แต่เพื่อให้ลดความซับซ้อนในส่วนเริ่มต้นนี้ สมการทั้งสี่ข้างต้นจะถูกจำกัดอยู่ในรูปของการเปลี่ยนแปลงตามเวลาในรูปของ (cosinusoid) เพื่อให้สอดคล้องกับการวิเคราะห์แบบ Phasor เช่นกำหนดให้ สนามไฟฟ้าเป็น

$$\overline{E} = E_x\overline{a}_x$$

โดยที่ กำหนดให้

$$E_x = E(x, y, z)\cos(\omega t + \phi) = E_{xyz}\cos(\omega t + \phi)$$

จะเห็นได้ว่า E_{xyz} จะเป็นฟังก์ชันของ x, y, z และบางทีอาจจะรวม ω ด้วย แต่จะไม่รวมเวลา ϕ อาจจะเป็นฟังก์ชันของ x, y, z และ ω จาก Euler's identity

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

ดังนั้น

$E_x = \mathrm{Re}\left\{E_{xyz}e^{j\omega t + \phi}\right\} = \mathrm{Re}\left\{E_{xyz}e^{j\phi}e^{j\omega t}\right\}$ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูป Phasor แทนด้วยตัวห้อย s เป็น

$$E_{xs} = E_{xyz}e^{j\phi} = E_{xyz}\angle\phi$$ ดังนั้น

$$\overline{E}_s = E_{xs}\overline{a}_x$$

s จะเป็นการสื่อและนำไปสู่การวิเคราะห์หรือคำนวณในโดเมนความถี่ โดยที่ s จะเป็นค่าจินตภาพร้อยเปอร์เซ็นต์ $s = j\omega$

ตัวอย่าง Phasor ของ $E_y = 100xy\cos(10^8 t - 0.5yz + 45^\circ)$ คือ

$E_{ys} = 100xye^{-j5yz}e^{j45^\circ} = 100xy\angle -5yz + 45^\circ$ มีข้อสังเกตอยู่ที่หน่วยของมุมด้วยว่าเป็น เรเดียน หรือองศา

ตัวอย่าง สมมติ Phasor $\overline{E}_s = 10xy\angle 0.5z\overline{a}_x + 15\dfrac{yz}{x}\angle 0.2xy\overline{a}_y + 30\angle 20^\circ \overline{a}_y$ ที่อัตราเร็วเชิงมุมเป็น 1000 จงหา ค่าสนามไฟฟ้าในโดเมน

$$\overline{E}(t) = 10xy\cos(10^3 t + 0.5z)\overline{a}_x + 15\frac{yz}{x}\cos(10^3 t + 0.2xy)\overline{a}_y + 30\cos(10^3 t + 20^\circ)\overline{a}_y$$

ในการวิเคราะห์เพิ่มเติมใจโดเมนความถี่ ก็คือ Differential ของ Phasor เช่น

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left\{E_{xyz}e^{j\phi}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{j\omega\left(E_{xyz}e^{j\phi}\right)e^{j\omega t}\right\}$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} = j\omega\left(E_{xyz}e^{j\phi}\right) = j\omega E_s$$

ดังนั้น Maxwell ทั้งสี่ได้เป็น

$$\nabla \times \overline{H}_s = j\omega\varepsilon_O \overline{E}_s$$
$$\nabla \times \overline{E}_s = -j\omega\mu_O \overline{H}_s$$
$$\nabla \cdot \overline{E}_s = 0$$
$$\nabla \cdot \overline{H}_s = 0$$

จากการคำนวณเวกเตอร์และความสัมพันธ์ของสมการ Maxwell ทั้งสี่เบื้องต้น จะได้เป็น

$$\nabla \times \nabla \times \overline{H}_s = \nabla\left(\nabla \cdot \overline{H}_s\right) - \nabla^2 \overline{H}_s$$
$$\nabla \times j\omega\varepsilon_0 \overline{E}_s = \nabla(0) - \nabla^2 \overline{H}_s$$
$$j\omega\varepsilon_0 \nabla \times \overline{E}_s = -\nabla^2 \overline{H}_s$$
$$-\nabla^2 \overline{H}_s = j\omega\varepsilon_0(-j\omega\mu_0 \overline{H}_s) = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 \overline{H}_s$$

กำหนดให้ $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ เป็น Wave number ใน Free space

$\nabla^2 \overline{H}_s = -k_0^2 \overline{H}_s$ สมมิตให้สนามแม่เหล็กมีองค์ประกอบเฉพาะในแนวแกน y ดังนั้น

$\nabla^2 H_{ys} = -k_0^2 H_{ys}$ ทำให้ได้สมการอนุพันธ์อันดับสองเป็น

$\dfrac{\partial^2 H_{ys}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 H_{ys}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 H_{ys}}{\partial z^2} = -k_0^2 H_{ys}$ และสมมติให้เป็นฟังก์ชันของ Z เท่านั้น (เคลื่อนที่ในแนวแกน z)

$$\frac{d^2 H_{ys}}{dz^2} = -k_0^2 H_{ys}$$

คำตอบของสมการอันดับสองนี้จะได้รูปทั่วไปเป็น $s = \pm jk_0$ เลือกมา 1 ค่าของ s

$$H_{ys} = Ae^{-jk_0 z} = H_{y0}e^{-jk_0 z}$$

ซึ่งจะได้ สนามแม่เหล็กในโดเมนเวลาและเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง เป็น

$$H_y(z,t) = H_{y0}\cos(\omega t - k_0 z)$$

โดยที่ H_{y0} เป็นค่าสนามแม่เหล็กที่เวลา t = 0 and z = 0 และอีกสมการที่ได้จากคำตอบหนึ่งคือ

$$H'_y(z,t) = H'_{y0}\cos(\omega t + k_0 z)$$

ซึ่งทั้งสองสมการข้างต้น แสดงค่าสนามที่ขณะใด ทั้งตำแหน่งและเวลา ซึ่งใน Free space ความเร็วของคลื่นมีค่าเท่ากับความเร็วแสง นั่นคือ

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2.998 \times 10^8 = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

สมการของสนามไฟฟ้าจึงได้เป็น

$$H_y(z,t) = H_{y0} \cos(\omega(t - z/c))$$

ลองแยกพิจารณทีละตัวแปร คือให้ เวลาเป็นศูนย์หรือค่าคงที่ จะได้สนามเวลาที่อยู่รูปฟังก์ชันของระยะในทิศทางการเคลื่อนที่

$$H_y(z,0) = H_{y0} \cos(-z\omega/c) = H_{y0} \cos(k_0 z)$$

$$H_y(z,C) = H_{y0} \cos(k_0 z + \phi)$$

นอกจากนี้แล้ว ในรูปคลื่น cosinusoid ยังมีตัวแปรอื่น ที่สำคัญคือ ความถี่ ความยาวคลื่น คาบ เป็นต้น

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_0} = \frac{c}{f} = cT$$

จากสมการ Maxwell และสนามแม่เหล็กที่ได้นี้ สนามไฟฟ้าสามารถหาได้จาก

$$\nabla \times H_{ys} \overline{a}_y = j\omega\varepsilon_O \overline{E}_s$$

$$-\frac{\partial H_{ys}}{\partial z} \overline{a}_x = j\omega\varepsilon_O E_{xs} \overline{a}_x$$

$$jk_0 H_{y0} e^{-jk_0 z} = j\omega\varepsilon_0 E_{xs}$$

$$E_{xs} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_{y0} e^{-jk_0 z}$$

ซึ่งจะได้สนามไฟฟ้าที่อยู่ในรูปฟังก์ชันของระยะทางในทิศทางการเคลื่อนที่และเวลาเป็น

$$E_x(z,t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_{y0} \cos(\omega(t - z/c)$$

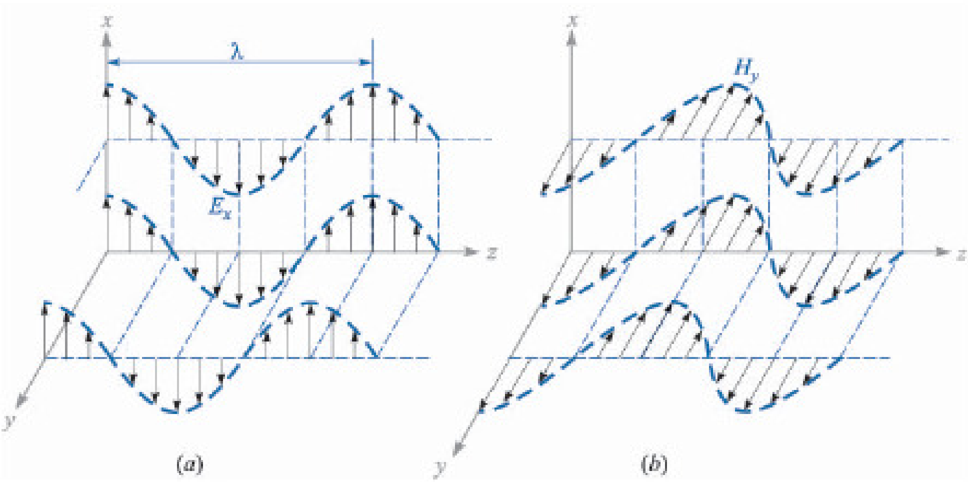
จะเห็นว่าเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง สนามไฟฟ้าต่อสนามแม่เหล็กเป็น

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377$$

อัตราส่วนระหว่าง permittivity and permeability จะเป็นนิยามของ intrinsic impedance มีหน่วยเป็นโอห์ม ซึ่งถ้าเป็นตัวกลางที่ไม่ใช่ Free space จะได้เป็น

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_R}{\varepsilon_0 \varepsilon_R}} = 377\sqrt{\frac{\mu_R}{\varepsilon_R}}$$

377 โอห์ม เป็นค่า intrinsic impedance ของ Free space



เป็นตัวอย่างของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เวลา t = 0 ค่าใด ค่าหนึ่ง ที่ค่า x = 0 and y = 0, x = 0 and y = ค่าใดๆ, y = 0 x = ค่าใดๆ โดยที่ $E_x = \eta H_y$ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งที่พิจารณา แต่ถ้าพิจารณารวมกันนั้น ลองสังเกตว่าทั้งสามองค์ประกอบทั้ง x,y,z จะตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้นในการพิจารณาสามารถที่จะแยกกันในการพิจารณาหรือวิเคราะห์

D11.2 Let $\mathbf{H}_s = (2\angle -40^\circ \mathbf{a}_x - 3\angle 20^\circ \mathbf{a}_y)e^{-j0.07z}$ A/m for a uniform plane wave traveling in free space. Find: (a) ω; (b) H_x at $P(1, 2, 3)$ at $t = 31$ ns; (c) $|\mathbf{H}|$ at $t = 0$ at the origin.

Ans. 21.0 Mrad/s; 1.93 A/m; 3.22 A/m

(a) จาก $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$ ดังนั้น $\omega = 0.07 \times 3 \times 10^8 = 21M$ เรเดียนต่อวินาที

(b) จากเฟสเซอร์ จะได้

$$H_x = 2\cos(21\times 10^6 t - 0.07z - 40^\circ)$$
$$= 2\cos(21\times 10^6 \times 31\times 10^{-9} - 0.07(3) - 0.698)$$

= 1.93 A/m

(c) จากเฟสเซอร์ จะได้

$$\overline{H} = 2\cos(21\times 10^6 t - 0.07z - 40^\circ)\overline{a}_x - 3\cos(21\times 10^6 t - 0.07z + 20^\circ)\overline{a}_y$$
$$= 2\cos(-40^\circ)\overline{a}_x - 3\cos(20^\circ)\overline{a}_y$$
$$= 1.532\overline{a}_x - 2.819\overline{a}_y$$
$$\left|\overline{H}\right| = 3.21 \text{ A/m}$$