บทที่ 5 ตัวนำ ฉนวนและตัวเก็บประจุไฟฟ้า

วัตถุประสงค์

บทนำ

ในบทนี้จะเป็นการนำเอากฎต่างๆ ที่เรียนมาแล้วประยุกต์ใช้กับวัสดุต่าง เริ่มตั้งแต่ตัวนำก็จะเป็นการนำไปสู่กฎของโอห์มในระดับการพิจารณาเป็นไมโครและมาโคร ซึ่งจะได้การคำนวณค่าความต้านทาน ในการพิจารณากลุ่มสารกึ่งตัวนำจะนำไปสู่การหาการวางตัวของในกาเป็นฉนวนไฟฟ้า ถ้าเป็นการนำเอาตัวนำและฉนวนไฟฟ้ามาร่วมกันจะทำให้เป็นตัวเก็บประจุไฟฟ้า ส่วนตัวเหนี่ยวนำซึ่งจะสัมพันธ์กับแม่เหล็กจะกล่าวถึงอีกที่ในบทหลัง

5.1 กระแสและความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (Current and current density)

กระแสไฟฟ้าเกิดจากการเคลื่อนที่ของประจุไฟฟ้าผ่านจุดอ้างอิงหรือระนาบอ้างอิงต่อหน่วยเวลา 1 Ampere มีค่าเท่ากับ 1 Coulomb/second

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

กระแสถูกนิยามเป็นการเคลื่อนที่ประจุไฟฟ้าบวกแทนที่การพิจารณาการเคลื่อนทีของประจุไฟฟ้าลบ และพิจารณาเป็นการเคลื่อนที่ผ่านจุดอ้างอิงแทนระนาบ ดังนั้น ค่าความหนาแน่นกระแสจะเป็นค่าที่ใช้โดยทั่วไปในการพิจารณา โดยนิยามเป็น

$$\Delta I = \overline{J} \cdot \Delta \overline{S}$$

กระแสที่ผ่านพื้นผิวที่กำหนดจะเป็นการหาผลรวมของกระแสที่อยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบที่ใช้พิจารณา

$$I = \int_S \overline{J} \cdot d\overline{S}$$

จากสมการข้างต้นทั้งสองจะได้ค่าที่เปลี่ยนไปของกระแสเป็น ของการเคลื่อนประจุไฟฟ้า ในแนวแกน x

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_v \Delta S \Delta x}{\Delta t} = \rho_v \Delta S v_x = \overline{J} \cdot \Delta \overline{S}$$

ดังนั้น

$$J_x = \rho_v v_x \qquad\qquad \overline{J} = \rho_v \overline{v}$$

Example The vector current density is given as $\overline{J} = \left(4/r^2\right)\cos\theta \overline{a}_r + 20e^{-2r}\sin\theta \overline{a}_\theta + r\sin\theta\cos\phi \overline{a}_\phi$ A/m^2 (a) Find $\overline{J}$ at $r = 3, \theta = 0, \phi = \pi$ (b) Find the total current through the spherical cap $r = 3, 0 < \theta < 20^\circ, 0 < \phi < 2\pi$ in direction $\overline{a}_r$. *(0.444 $\overline{a}_r$ A/m^2, 1.470 A)*

5.2 กระแสไฟฟ้าต่อเนื่อง (Continuity of Current)

แม้ว่าเราจะอยู่ในโหมดของไฟฟ้าสถิตย์แต่การหาค่ากระแสก็ถูกรวมเข้ามาด้วยเนื่องจากเป็นการพิจารณาในโหมดของกฎการอนุรักษ์ประจุ จากส่วนที่ผ่านมาจะได้ค่ากระแสที่ไหลผ่านพื้นผิวปิดเป็น

$$I = \oint_S \overline{J} \cdot d\overline{S}$$

และถ้าเป็นกระแสที่เกิดจากการไหลออกของประจุจากพื้นผิวปิดจะคิดเป็นอัตราการลดลงของประจุในพื้นผิวปิดนั้น ซึ่งจะเป็นกระแสที่มีทิศทางไหลออกจากพื้นผิวปิดนั้น

$$I = \oint_S \overline{J} \cdot d\overline{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

จากทฤษฎี Divergence ในบทที่ผ่านมาจากความสัมพันธ์ของการอินทิเกรตเชิงผิวกับปริมาตรจะได้ความสัมพันธ์เป็น

$$I = \oint_S \overline{J} \cdot d\overline{S} = \int_{vol} \nabla \cdot \overline{J} dv = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{vol} \rho_v dv = \int_{vol} -\frac{d\rho_v}{dt} dv$$

$$\nabla \cdot \overline{J} = -\frac{d\rho_v}{dt}$$

D5.2. Current density is given in cylindrical coordinates as $\mathbf{J} = -10^6 z^{1.5} \mathbf{a}_z$ A/m^2 in the region $0 \le \rho \le 20\,\mu$m; for $\rho \ge 20\,\mu$m, $\mathbf{J} = 0$. (*a*) Find the total current crossing the surface $z = 0.1$ m in the $\mathbf{a}_z$ direction. (*b*) If the charge velocity is 2×10^6 m/s at $z = 0.1$ m, find ρ_v there. (*c*) If the volume charge density at $z = 0.15$ m is -2000 C/m^3, find the charge velocity there.

Ans. -39.7 mA; -15.81 kC/m^3; -2900 m/s

(a) at z = 0.1

$$I = \int_S \overline{J} \cdot d\overline{S} \qquad d\overline{S} = r d\phi dr \overline{a}_r$$

$$I = \int_0^{20\mu}\int_0^{2\pi} -10^6 z^{1.5} r d\phi dr = -\pi(20\mu)^2 10^6 (0.1)^{1.5} = -39.7\mu A$$

(b) from

$$J_z = \rho_v v_z$$

$$\rho_v = \frac{-10^6 (0.1)^{1.5}}{2\times 10^6} = 15.8 \text{ mC/m}^3$$

(c)

$$v_z = \frac{J_z}{\rho_v} = \frac{-10^6(0.15)^{1.5}}{-2000} = 29.00 \text{ m/s}$$

5.3 ตัวนำไฟฟ้าโลหะ

อะตอมของตัวนำของตัวนำไฟฟ้าโลหะโดยทั่วไปจะมีอิเล็กตรอนอิสระ (Valence electron) ซึ่งเป็นตัวการสำคัญของการนำไฟฟ้าซึ่งจะเป็นบ่งชี้ในการวัดค่าการนำไฟฟ้าของวัสดุนั้น ซึ่งจะทำให้เกิดแรงที่อิเล็กตรอนนี้เมื่ออยู่ในสนามไฟฟ้าเป็น

$$\overline{F} = -e\overline{E}$$

ทิศทางของแรงจะมีทิศทางของสนามไฟฟ้า ดังนั้น อิเล็กตรอน จะถูกเร่งความเร็วตามแรงที่ได้รับ แต่อย่างไรก็ตามถ้ามีความเร่งอย่างต่อเนื่องจะทำให้เกิดความเร็วแบบไม่จำกัดซึ่งจะไม่เป็นจริงในทางปฏิบัติ ความเร็วของอิเล็กตรอนในสนามไฟฟ้าจึงเป็นค่าความเร็วเฉลี่ยซึ่งมีชื่อเรียกว่า ความเร็วลอยเลื่อน (Drift velocity)

$$\overline{v}_d = -\mu_e \overline{E}$$

โดยที่ μ_e เป็นค่า Mobility ของอิเล็กตรอน การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนจะไปในทางตรงกันข้ามกับสนามแม่ไฟฟ้า แทนค่าความเร็วลงในสมการในการหาค่าความหนาแน่นของกระแสจะได้

$$\overline{J} = -\rho_e \mu_e \overline{E}$$

โดยที่ ρ_e การกระจายของอิเล็กตรอนอิสระต่อปริมาตร ถ้ามีประจุบวกและลบเท่ากันแสดงว่า ρ_v เป็นศูนย์ มีค่าเป็นกลางทางไฟฟ้า

ความสัมพันธ์ระหว่าง สนามไฟฟ้าและความหนาแน่นกระแสสำหรับตัวนำไฟฟ้าได้ใหม่เป็น

$$\overline{J} = \sigma \overline{E}$$

โดยที่ $\sigma = -\rho_e \mu_e$ เป็นค่าความนำไฟฟ้า (Conductivity) มีหน่วยเป็น Mhos/m

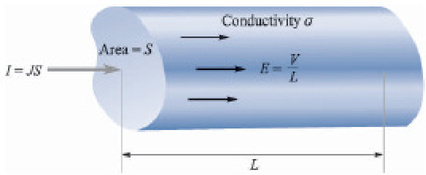
ในการประยุกต์ใช้กฎของโอห์ม แต่จะต้องมีการกำหนดให้ ความหนาแน่นกระแสและสนามไฟฟ้าให้เป็นค่าที่สม่ำเสมอ พิจารณาจากการอินทิเกรตกระแส

$$I = \int_S \overline{J} \cdot d\overline{S} = JS$$

และ

$$V_{ab} = -\int_b^a \overline{E} \cdot d\overline{L} = -E\int_b^a dL = -EL_{b\to a} = EL_{ab}$$

$$I = JS = \sigma ES$$



และจาก

$$I = \frac{V}{R} = \frac{EL_{ab}}{R} = \sigma ES$$

ดังนั้น ความต้านทานจะหาได้จาก

$$R = \frac{L_{ab}}{\sigma S} \qquad\qquad R = \frac{L}{\sigma S} \quad \Omega$$

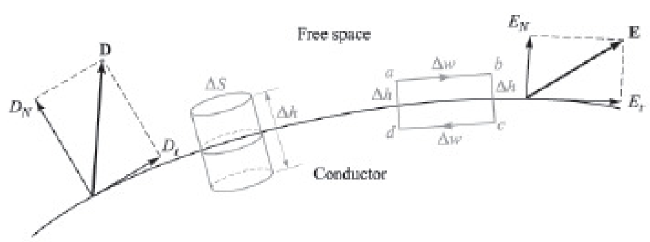
หรือหาได้จาก

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_b^a \overline{E} \cdot d\overline{L}}{\int_S \sigma \overline{E} \cdot d\overline{S}}$$

เป็นที่มาของการหาค่าความต้านทานภายในตัวนำไฟฟ้า

5.4 คุณสมบัติของตัวนำและเงื่อนไขของขอบเขต

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$



เงื่อนไขเบื้องต้นของขอบเขตระหว่างตัวนำและฉนวนไฟฟ้า สำหรับสนามไฟฟ้าสถิตย์ ไม่มีประจุไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าภายในวัสดุตัวนำ ซึ่งประจุไฟฟ้าทั้งหมดจะปรากฏที่ผิวของตัวนำ(ที่ขอบเขตระหว่างวัสดุทั้งสอง) ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าภายนอกกับประจุไฟฟ้าที่กระจายบนผิวของตัวนำสามารถหาได้จากเงื่อนไขดังต่อไปนี้

สนามไฟฟ้าจากภายนอกจะถูกแยกพิจารณาเป็นสององค์ประกอบ คือในแนวตั้งฉากและแนวสัมผัสผิวของตัวนำ รูปข้างต้นเป็นการแสดงการแยกองค์ประกอบของ ความเข้มสนามไฟฟ้าและความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าที่ผิวของตัวนำ อย่างไรก็ตามทั้งสองค่าจะเป็นศูนย์ภายในตัวนำ

จากการอินทิเกรตสนามไฟฟ้าในเส้นทางปิดใด (ผลรวมของงานในการเคลื่อนที่ประในเส้นทางปิด)

$$\oint_L \overline{E} \cdot d\overline{L} = 0$$

พิจารณาบนเส้นทางปิด abcda

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a \quad = 0$$

$$E_t \Delta w - E_N \frac{1}{2}\Delta h + E_N \frac{1}{2}\Delta h = 0$$ (E ภายในตัวนำเป็น 0)

$$E_t \Delta w = 0$$
$$E_t = 0$$

เป็นการยืนยันว่าไม่มีสนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสผิวของตัวนำ

พิจารณาที่ทรงกระบอกและใช้ความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าร่วม (จะเหมาะสมกว่าความเข้มสนามไฟฟ้า) โดยอ้างถึงกฎของเกาส์

$$\oint_S \overline{D} \cdot d\overline{S} = Q$$

อินทิเกรตโดยรอบทั้งหมด

$$\int_{top} + \int_{bottom} + \int_{side} = Q$$

อินทิเกรตสองตัวข้างหลังเป็นศูนย์ เนื่องจาก ข้างล่าง ภายในตัวนำ สนามไฟฟ้าเป็นศูนย์ และ ด้านข้างเพราะสนามไฟฟ้าที่ขนานกับผิวตัวนำเป็นศูนย์

$$D_N \Delta S = Q = \rho_S \Delta S$$

หรือ

$$D_N = \rho_S \qquad \text{คูลอมบ์}$$

ดังนั้น Boundary condition ระหว่างตัวนำไฟฟ้าและฉนวนอย่าง Free space จึงได้ว่า

$$D_t = E_t = 0$$
$$D_N = \varepsilon_0 E_N = \rho_S$$

Example A potential field is given as $V = 100e^{-5x}\sin 3y \cos 4z$ V. Let point $P(0.1, \pi/12, \pi/24)$ be located at a conductor-free space boundary. At point P, find the magnitude of:

(a) V

$$V = 100\, e^{-5(1)} \sin\, 3(\pi/12) \cos\, 4(\pi/24) = 37.1 \text{ V}$$

(b) Electric field intensity

$$\overline{E} = -\nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\overline{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\overline{a}_z \right) 100e^{-5x}\sin 3y \cos 4z$$
$$= -500e^{-5x}\sin 3y \cos 4z\overline{a}_x + 300e^{-5x}\cos 3y \cos 4z\overline{a}_y - 400e^{-5x}\sin 3y \sin 4z\overline{a}_z$$
$$= -185.7\overline{a}_x + 111.4\overline{a}_y - 85.8\overline{a}_z$$
$$\left|\overline{E}\right| = 232.9$$

(c) E_N

Generally, the value E in the (b) is the normal to the surface of the conductor, therefore, E_N = 232.9 V/m

(d) E_t

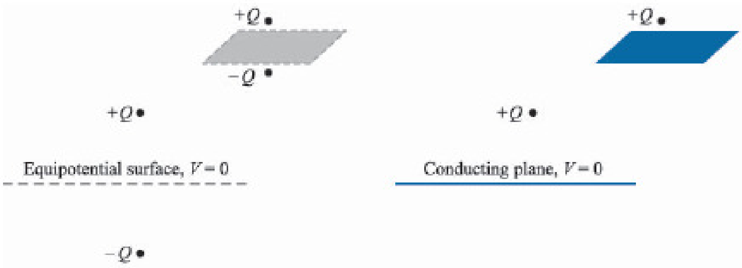
Electric field intensity in tangential direction to the boundary is 0.

(e) ρ_S

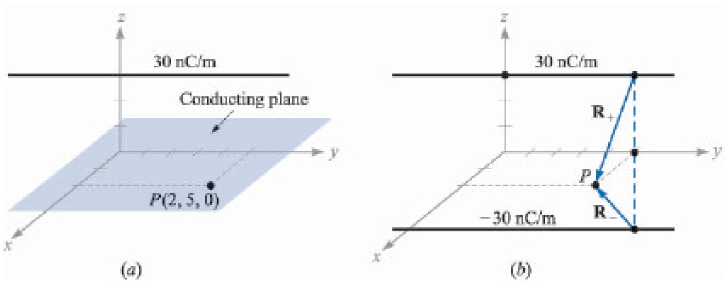
$$\rho_S = D_N = \varepsilon_0 E_N = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 232.9 \qquad \text{nC/m}^2$$
$$= 2.06$$

5.5 วิธีการ Images

จากบทที่ผ่านมาได้มีการกล่าวถึงกรณีของประจุไฟฟ้าที่มีขนาดเท่ากันวางคู่กันอยู่ในตัวกลาง เช่น Free space ซึ่งที่ตรงกลางระหว่างประจุไฟฟ้าทั้งสองค่าศักย์ไฟฟ้าจะมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาของกรณีที่ประจุไฟฟ้าวางอยู่เหนือระนาบตัวนำไฟฟ้า ซึ่งเปรียบเสมือนเป็นกราวด์ที่มีขนาดไม่จำกัด (หรือระนาบนั้นจะมีขนาดที่ใหญ่มากเมื่อเทียบกับขนาดของประจุไฟฟ้า) เพราะที่ผิวตัวนำไฟฟ้าค่าศักย์ไฟฟ้าจะมีค่าเป็นศูนย์ ค่าสนามไฟฟ้าเหนือแผ่นตัวนำนั้น สามารถคำนวณหาได้จาก image ซึ่งประกอบด้วยไดโพลที่มีประจุไฟฟ้าสมมาตรที่แนวของระนาบตัวนำไฟฟ้านั้น ทั้งสองรูปข้างล่างสามารถแทนกันและกันได้



ตัวอย่าง An infinite line of charge of 30 nC/m is located at x = 0 and z = 3 as shown in Figure at the right hand side. Find the surface charge density on the conducting plane at z = 0.



ในการใช้วิธีการ Image รูป (a) สามารถแทนได้รูป (b) เกิดเป็นเงาบนของเส้นประจุบวกเป็นเส้นประจุลบที่อีกด้านหนึ่งของระนาบ แล้วแยกเอาระนาบตรงกลางระหว่างเส้นประจุทั้งสองออกไป

สิ่งที่ต้องการคือ ρ_S ที่จุด P ซึ่งจาก

$$\rho_S = D_N = \varepsilon_0 E_N$$

ที่จุด P ความเข้มสนามไฟฟ้าสามารถหาได้จากเส้นประจุไฟฟ้าทั้งสองจากรูป (b) จาก

$$\overline{E}_+ = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\left|\overline{R}_+\right|^2}\overline{R}_+ = \frac{30}{1/18\sqrt{2^2+(-3)^2}^{\,2}}\left(2\overline{a}_x - 3\overline{a}_z\right)$$

$$\overline{E}_- = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\left|\overline{R}_-\right|^2}\overline{R}_- = \frac{-30}{1/18\sqrt{2^2+3^2}^{\,2}}\left(2\overline{a}_x + 3\overline{a}_z\right)$$

เมื่อรวมความเข้มสนามไฟฟ้าเนื่องจากทั้งสองเส้นประจุไฟฟ้าจะได้ความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด P เป็น

$$\overline{E} = \overline{E}_+ + \overline{E}_- = -249\overline{a}_z = \overline{E}_N$$

ดังนั้น กลับไปที่รูป (a) ที่จุด P บนระนาบตัวนำไฟฟ้า

$$\rho_S = D_N = \varepsilon_0 E_N = -\frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\times 249 = -2.20 \text{ nC/m}^2$$

5.6 สารกึ่งตัวนำ (Semiconductor)

ในสารกึ่งตัวนำจะประกอบด้วยโฮลและอิเล็กตรอน ซึ่งโฮลจะเปรียบเสมือนประจุไฟฟ้าบวก ส่วนอิเล็กตรอนจะเป็นประจุไฟฟ้าลบ ในการนำกระแสไฟฟ้าโฮลและอิเล็กตรอนจะมีการเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามแต่จะเป็นผลให้กระแสไฟฟ้าที่ได้จากประจุไฟฟ้าทั้งสองรวมกันซึ่งจะเป็นผลโดยตรงมาจากความต้านทานของสารกึ่งตัวนำ ดังนั้น ค่าความนำไฟฟ้าของสารกึ่งตัวนำสามารถหาได้จาก

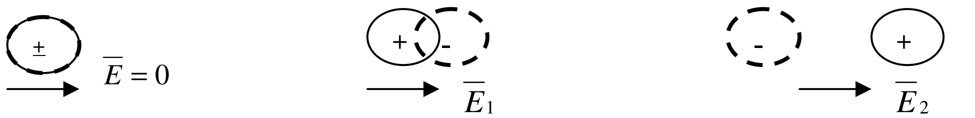
$$\sigma = -\rho_e \mu_e + -\rho_h \mu_h$$

เมื่อ e และ h เป็นสัญญลักษณ์แทน อิเล็กตรอน และ โฮล ตามลำดับ ส่วน ρ และ μ แทนค่า ความหนาแน่นของประจุ และ ค่า mobility ตัวอย่างเช่น silicon มีค่า μ_e และ μ_h เป็น 0.12 และ 0.025 (m/V-s) ส่วน germanium เป็น 0.36 และ 0.17 (m/V-s) ตามลำดับ

ซึ่งค่าความหนาแน่นของทั้งโฮลและอิเล็กตรอนจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิรอบข้าง

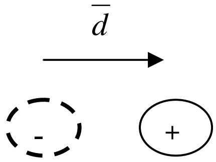
5.7 คุณสมบัติของวัสดุฉนวนไฟฟ้า (Dielectric materials)

เป็นวัสดุ ที่นำไฟฟ้าได้น้อยมากหรือไม่นำไฟฟ้าเลย แม้มีสนามไฟฟ้าจากภายนอกมากระทำ ประจุไฟฟ้าของโมเลกุลของวัสดุฉนวนไฟฟ้าจะเป็นแบบผูกพัน Q_b (bound charge) ทั้งหมด แต่เมื่อมีสนามไฟฟ้าเข้ามาจะทำให้ประจุไฟฟ้าบวกลบในโมเลกุลแยกห่างจากกันเล็กน้อยด้วยอำนาจของสนามไฟฟ้านั้น ไม่ได้แยกหลุดจากกันเป็นอิสระซึ่งจะพิจารณาเป็นรูปแบบของไดโพล



สนามไฟฟ้าจะถ่ายทอดพลังงานให้กับไดโพล ซึ่งจะสะสมอยู่ในรูปแบบพลังงานศักย์ และพลังงานศักย์นี้จะถูกปล่อยออกมาเมื่อศักย์ไฟฟ้าภายนอกมีค่าลดลงต่ำกว่าพลังงานศักย์ที่ถูกสะสมอยู่หรือศักย์ไฟฟ้าภายนอกเป็นศูนย์ โมเลกุลของวัสดุฉนวนไฟฟ้าบางชนิดมีขั้วคือมีการปแยกกันระหว่างประจุไฟฟ้าบวกลบเป็นลักษณะของไดโพลแต่ถ้าสนามไฟฟ้าภายนอกที่มากระทำเป็นศูนย์โมเลกุลเหล่านั้นจะมีการเรียงตัวที่ไม่เป็นระเบียบ แต่เมื่อมีสนามไฟฟ้าจากภายนอกเข้ามาจะทำให้โมเลกุลในรูปของไดโพลเหล่านั้นมีการเรียงตัวกันตามอิทธิพลของสนามไฟฟ้าภายนอกนั้น

จากที่ได้อธิบายคุณลักษณะอย่างหนึ่งของไดโพล คือ ไดโพลโมเมนต์



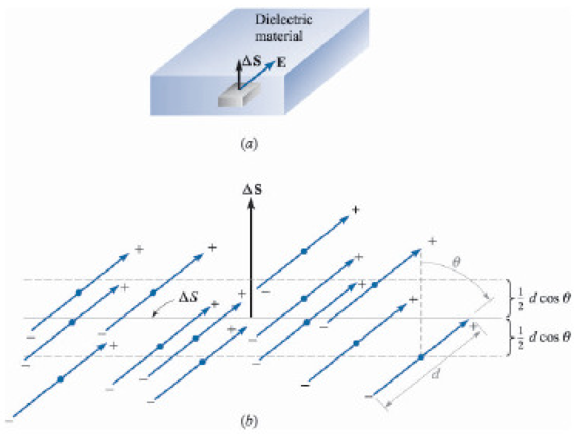
$$\overline{p} = Q\overline{d}$$

ถ้ามี ไดโพลจำนวน n ดังนั้น ผลรวมไดโพลโมเมนต์เป็น

$$\overline{p}_{total} = \sum_{i=1}^{n} Q\overline{d}_i$$

$\overline{P}$ polarisation มีค่าเท่ากับ $\overline{p}_{total} / \Delta v$ เป็นค่าไดโพลโมเมนต์รวมต่อหน่วยปริมาตร หรือ ความหนาแน่นไดโพลโมเมนต์

$$\overline{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \left(\overline{p}_{total} = n\overline{p} = nQ\overline{d} \right) \qquad \text{C/m}^2$$



Bound charge Q_b ซึ่งเกิดจาก Polarisation ในพื้นผิวปิดรอบปริมาตร v สามารถหาได้จาก

$$Q_b = -\oint_S \overline{P} \cdot d\overline{S}$$

เครื่องหมายลบมาจาก ประจุลบจะถูกล้อมรอบด้วยผิวปิดเล็กๆ ภายในวัสดุฉนวนดังแสดงในรูป เนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอก

$$Q_b = -\oint_S \overline{P} \cdot d\overline{S} = -\int_v \left(\nabla \cdot \overline{P} \right) dv = \int_v \rho_{bv} dv$$

$$\rho_{bv} = \nabla \cdot \overline{P}$$

เมื่อพิจารณารวม โดยอ้างถึง กฎของเกาส์ โดยที่ผลรวมของประจุไฟฟ้าเป็นผลของสนามไฟฟ้าภายนอกเป็น

$$Q_T = \oint_S \varepsilon_0 \overline{E} \cdot d\overline{S}$$

ซึ่งผลรวมของประจุรวมจะมาจากประจุไฟฟ้าอิสระรวมกับประจุผูกพัน (bound charge)

$$Q_T = Q_b + Q$$

เมื่อ Q เป็น ประจุไฟฟ้าอิสระที่ล้อมรอบด้วย S เป็นประจุที่สำคัญในสมการ Maxwell ดังนั้น

$$Q = Q_T - Q_b = \oint_S \varepsilon_0 \overline{E} \cdot d\overline{S} + \oint_S \overline{P} \cdot d\overline{S} = \oint_S \left(\varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}\right) \cdot d\overline{S}$$

และจะได้

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}$$

ความสัมพันธ์ ของ $\overline{D}, \overline{E}, \overline{P}$

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho_v = \nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}\right) = \rho_T - \rho_b$$

ในสารไดอิเล็กตริก แบบ isotropic polarisation จะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับความเข้มสนามไฟฟ้า

$$\overline{P} = \chi_e \varepsilon_0 \overline{E}$$

ดังนั้น

$$\overline{D} = \left(1 + \chi_e\right) \varepsilon_0 \overline{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \overline{E} = \varepsilon \overline{E}$$

โดยที่ χ_e Electrical susceptibility, ε_r Relative permittivity

ส่วน anisotropic dielectric material ค่า permittivity จะไม่คงที่จะเปลี่ยนแปลงตามทิศทางของสนามไฟฟ้า

สรุป เราจะได้ความสัมพันธ์

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$$

โดยที่

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ เป็นผลมาจาก polarisation, dipole moment and bound charge

ความสัมพันธ์ระหว่าง ความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าและประจุอิสระยังคงเดิม

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho_v$$

$$\oint_S \overline{D} \cdot d\overline{S} = Q$$

ตัวอย่าง แผ่นวัสดุฉนวนไฟฟ้า (slab) มีค่า relative dielectric คงที่ 3.8 มีค่าความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าคงที่ 8 nC/m^2 ถ้าไม่มีการสูญเสีย จงหา

(a) สนามไฟฟ้า

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{8n}{3.8 \times 8.842 \times 10^{-12}} = 238 V/m$$

(b) P (Polarisation)

$$P = \chi_e \varepsilon_0 E = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E = 5.89 \text{ nC/m}^2$$

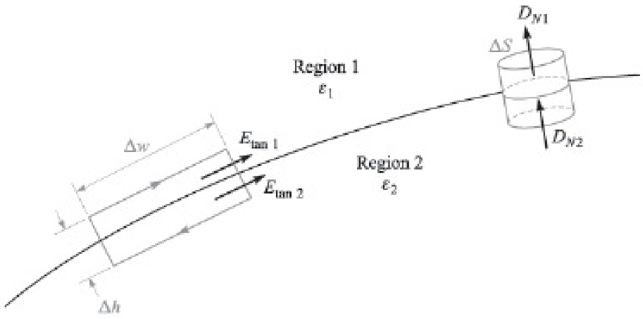
(c) หาค่าจำนวนไดโพลเฉลี่ยต่อปริมาตร ถ้าค่าเฉลี่ยไดโพลโมเมนต์เป็น 10^{-29} C/m

$$\overline{P} = \frac{n\overline{p}}{\Delta v}$$

$$n / \Delta v = \frac{5.89n}{10^{-29}} = 5.89 \times 10^{20}$$

5.8 เงื่อนไขขอบเขตของวัสดุฉนวนไฟฟ้า

พิจารณาสารฉนวนไฟฟ้าสองชนิดมีขอบเขตร่วมกันดังรูปซ้าย



$$\oint \overline{E} \cdot d\overline{L} = 0$$

เนื่องจาก ในแนวตั้งฉาก Δh มีค่าเล็กมาก สามารถละได้หรือจะพิจาณาเป็นการอินทิเกรตที่จะหักล้างกันระหว่าง $\Delta h/2$ ของด้านซ้ายและขวาที่มีทิศทางตรงข้ามในแต่ละตัวกลาง ดังนั้นจึงได้เป็น

$$\overline{E}_{\tan 1} \cdot \Delta\overline{w} + \overline{E}_{\tan 2} \cdot \left(-\Delta\overline{w}\right) = 0$$
$$\overline{E}_{\tan 1} = \overline{E}_{\tan 2}$$

และจะได้ว่า

$$\frac{\overline{D}_{\tan 1}}{\varepsilon_1} = \overline{E}_{\tan 1} = \overline{E}_{\tan 2} = \frac{\overline{D}_{\tan 2}}{\varepsilon_2}$$
$$\frac{\overline{D}_{\tan 1}}{\overline{D}_{\tan 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

ที่ทรงกระบอกเล็ก ใช้กฎของเกาส์

$$\oint_S \overline{D} \cdot d\overline{S} = Q_{en}$$
$$\int_{top} + \int_{bottom} + \int_{side1} + \int_{side2} = Q_{en} = \Delta Q$$

อินทิเกรตด้านข้างในตัวกลางทั้งสองเป็นศูนย์ เนื่องจากผิวรอบข้างนั้นจะเป็นผลรวมของเส้นแรงไฟฟ้าที่เข้าและออกจากรอบข้าง จึงเป็นศูนย์ ดังนั้น เส้นแรงไฟฟ้าที่พุ่งเข้าและออกจากทรงกระบอกในแนวตั้งฉากมีค่าไม่เท่ากันซึ่งผลต่างที่ได้ก็คือประจุไฟฟ้าที่ต่างกันที่ผิวของตัวกลางแต่ละตัว

$$D_{N1}\Delta S + D_{N2}(-\Delta S) = \Delta Q = \rho_s \Delta S$$
$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_s$$

ถ้าเป็นฉนวนไฟฟ้าสมบูรณ์จะไม่มีประจุไฟฟ้าอิสระที่ผิวดังนั้น ความหนาแน่นประไฟฟ้าอิสระเป็นศูนย์

$$D_{N1} = D_{N2}$$
$$\varepsilon_1 E_{N1} = \varepsilon_2 E_{N2}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตข้างต้น ระหว่าง conductor-free space เป็น conductor-dielectric สนามไฟฟ้าในตัวนำเป็ศูนย์ ซึ่งจะได้

$$D_t = E_t = 0$$
$$D_N = \varepsilon E = \rho_S$$

ตัวอย่าง ที่ z < 0 เป็นวัสดุฉนวนไฟฟ้าที่มีค่า $\varepsilon_r = 3.2$ ที่ Z > 0 เป็นวัสดุฉนวนไฟฟ้าที่มีค่า $\varepsilon_r = 2$ กำหนดให้ $\overline{D}_1 = -30\overline{a}_x + 50\overline{a}_y + 70\overline{a}_y$ nC/m^2 จงหา

(a) D_{N1}

$$D_{N1} = \overline{D}_1 \cdot \overline{a}_N = \left(-30\overline{a}_x + 50\overline{a}_y + 70\overline{a}_z\right) \cdot \overline{a}_z = 70nC/m^2$$

(b) $\overline{D}_{t1}$

$$\overline{D}_1 = \overline{D}_{t1} + \overline{D}_{N1}$$

$$\overline{D}_{t1} = -30\overline{a}_x + 50\overline{a}_y + 70\overline{a}_z - 70\overline{a}_z = -30\overline{a}_x + 50\overline{a}_y nC/m^2$$

(c) Polarisation

$$\overline{P}_1 = \chi_e \varepsilon_0 \overline{E}_1$$

$$\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 \overline{E_1} = \overline{D}_1$$

$$\overline{E}_1 = \frac{\overline{D}_1}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}$$

$$\overline{P}_1 = (\varepsilon_{r1} - 1)\varepsilon_0 \frac{\overline{D}_1}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} = \frac{2.2}{3.2}\left(-30\overline{a}_x + 50\overline{a}_y + 70\overline{a}_z\right)n = -20.6\overline{a}_x + 34.4\overline{a}_y + 48.1\overline{a}_z nC/m^2$$

(d) $\overline{D}_2$ จะได้จากเวกเตอร์ในแนวตั้งฉากกับผิวที่สอง บวกกับเวกเตอร์ที่ในแนวสัมผัสกับผิวที่สอง

$$\overline{D}_{N2} = \overline{D}_{N1} = 70\overline{a}_z nC/m^2$$

$$\overline{E}_{t2} = \overline{E}_{t1}$$

$$\frac{\overline{D}_{t2}}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} = \frac{\overline{D}_{t1}}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}$$

$$\overline{D}_{t2} = \frac{2}{3.2}\left(-30\overline{a}_x + 50\overline{a}_y\right)n$$

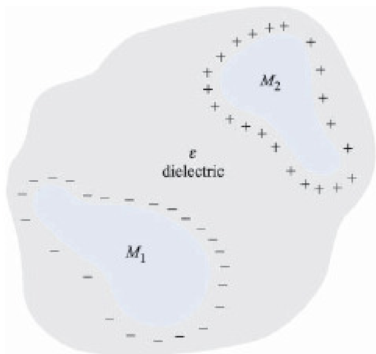
$$= -18.75\overline{a}_x + 31.25\overline{a}_y + 43.75\overline{a}_z nC/m^2$$

$$\overline{D}_2 = \overline{D}_{N2} + \overline{D}_{t2} = -18.75\overline{a}_x + 31.25\overline{a}_y + 70\overline{a}_z nC/m^2$$

(e) $\overline{P}_2$ หาโดยวิธีเดียวกันกับข้อ (c)

5.9 คาปาซิเตอร์ (Capacitor)

นิยามของค่าความจุไฟฟ้า (Capacitance) คือ ค่าขนาดของประจุไฟฟ้า Q ส่วนค่าความต่างศักย์ระหว่างตัวนำที่มีประไฟฟ้าเท่ากันแต่ตรงกันข้ามดังแสดงในรูป กำหนดให้ระหว่างตัวนำทั้งสองมีความต่างศักย์ V



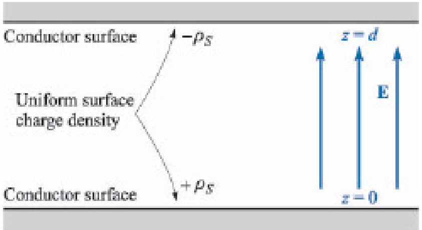
$$C = \frac{Q}{V}$$

ในรูปทั่วไป

$$C = \frac{\oint_S \varepsilon \overline{E} \cdot d\overline{L}}{-\int_-^+ \overline{E} \cdot d\overline{L}}$$

หน่วยของ Capacitance คือ Farad หรือ Coulomb/volt

ลองพิจารณาแผ่นประจุไฟฟ้าที่ขนานกันที่มีค่าความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าต่อพื้นที่เท่ากันแต่มีขั้วตรงกันข้าม วางห่างกันเป็นระยะ d ดังรูปซ้ายมือ ค่าความเข้มสนามไฟฟ้าสามารถหาได้จาก



$$\overline{E} = \overline{E}_{bottom} + \overline{E}_{top} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon}\overline{a}_Z + \frac{-\rho_S}{2\varepsilon}\left(-\overline{a}_Z\right) = \frac{\rho_S}{\varepsilon}\overline{a}_Z$$

V/m

ที่แต่ละแผ่นจะเห็นว่าค่าสนามไฟฟ้ามีทิศทางสัมพันธ์กับเวกเตอร์ตั้งฉากกับแต่ละระนาบ ซึ่งได้ความเข้มสนามไฟฟ้ารวมดังสมการข้างต้น ดังนั้นความต่างศักย์สามารถคำนวณได้จาก

$$V_0 = -\int_{top}^{bottom} \overline{E}\cdot d\overline{L} = -\int_{top}^{bottom} \frac{\rho_S}{\varepsilon}\overline{a}_z \cdot \left(-d\overline{a}_z\right) = \frac{\rho_S}{\varepsilon}d$$

เพื่อจะคำนวณหาค่าความจุไฟฟ้า ค่าประจุไฟฟ้าสามารถคำนวณหาจากความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าต่อพื้นที่ผิวคูณกับพื้นที่ของพื้นผิว $Q = \rho_S S$ ดังนั้น

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_S S}{\rho_S d/\varepsilon} = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad \text{Farad}$$

พลังงานที่สะสมอยู่ในคาปาซิเตอร์สามารถหาได้จาก

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol}\varepsilon E^2 dv = \frac{1}{2}\int_0^S\int_0^d \frac{\varepsilon\rho_S^2}{\varepsilon^2}dzdS = \frac{1}{2}\frac{\rho_S^2}{\varepsilon}Sd = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}\frac{\rho_S^2 d^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\rho_S S\frac{\rho_S d}{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\rho_S S)^2\frac{d}{\varepsilon S}$$

$$W_E = \frac{1}{2}CV_O^2 + \frac{1}{2}QV_O = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

ตัวอย่าง หาค่า Relative permittivity ของฉนวนไฟฟ้าที่อยู่ระหว่างแผ่นประจุไฟฟ้าขนาน

(a) C = 40 nF, d = 0.1 mm, S = 0.15 m^2

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = 40\times10^{-9} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon\times0.15}{0.1\times10^{-3}}$$

$$\varepsilon_r = \frac{40\times10^{-9}\times0.1\times10^{-3}\times36\pi}{0.15\times10^{-9}}$$

$$\varepsilon_r = 3.015$$

(b) พลังงานสะสมต่อปริมาตร 100 J/m^3, V_O = 200 V and d = 45 mm

$$W_E = \frac{1}{2}CV_O^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}V_O^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r\varepsilon_O V}{d^2}V_O^2$$

$$\frac{W_E}{V} = 100 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r\varepsilon_O}{(45mm)^2}200^2$$

$$\varepsilon_r = 1.145$$

(c) ขนาดของความเข้มสนามไฟฟ้า = 200 kV/m, $\rho_S = 20\mu C/m^2$, d = 100 micro-metre

$$E = \frac{\rho_S}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon_r = \frac{20\times10^{-6}}{1/36\pi\times10^{-9}\times200\times10^3} = 11.30$$

5.10 ตัวอย่างการต่อค่าความจุไฟฟ้า

พิจารณาที่สาย Coaxial ที่มีรัศมีภายใน a และรัศมีภายนอก b และความยาว L ค่าประจุไฟฟ้า $Q = \rho_L L$ จากการกระจายสม่ำเสมอต่อหน่วยความยาว ค่าความต่างศักย์ระหว่างรัศมี จาก b ไป a $V_{ab} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_O} \ln\frac{b}{a}$ ดังนั้น ค่าความจุไฟฟ้าเป็น

$$C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)}$$

ลองพิจารณาที่ทรงกลม ที่มีรัศมีระหว่าง a และ b โดยที b > a เป็นวัสดุฉนวนไฟฟ้า จากกฎของเกาส์

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \qquad V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

ถ้าให้รัศมีนอก b เป็น infinity ดังนั้น ความจุไฟฟ้าของทรงกลมจะได้เป็น

$$C = 4\pi\varepsilon a$$

ทรงกลมที่มีการเคลือบด้วยฉนวนไฟฟ้าค่า Permittivity $\varepsilon = \varepsilon_1$ จนได้รัศมีเป็น a เป็น r_1 ดังนั้น ค่าความเข้มสนามไฟฟ้าที่รัศมีต่างๆ เป็น

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \to (a < r < r_1)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \to (r_1 < r)$$

ค่าความต่างศักย์เป็น

$$V_a - V_\infty = -\int_{r_1}^{a} \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_1 r^2} - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

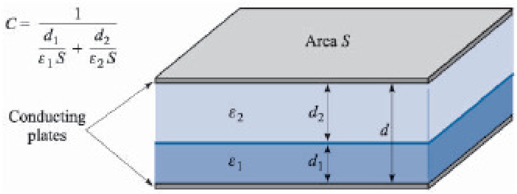
$$= \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0 r_1}\right]$$

ดังนั้น

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0 r_1}}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

ซึ่งโดยลักษณะทางกายภาพจะเป็นการต่อคาปาซิเตอร์แบบอนุกรม ซึ่งค่า Permittivity เป็นตัวแปรสำคัญในการแยกเป็นตัวเก็บประจุต่างชนิดกัน ซึ่งการคำนวณค่าการเก็บประจุแต่ละตัวเป็น $C = \varepsilon S / d$ พิจารณารูปประกอบจะได้เป็น



$$C = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} = \frac{1}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2 S}}$$

อีกหนึ่งของการวิเคราะห์ของการต่อตัวเก็บประจุแบบอนุกรม จาก $V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2$ และจาก เงื่อนไขขอบเขตระหว่างฉนวนไฟฟ้าจะได้ว่า $D_{N1} = D_{N2}$ $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$

$$V_0 = E_1 d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1 d_2$$

$$E_1 = \frac{V_0}{d_1 + d_2(\varepsilon_1 / \varepsilon_2)}$$

ความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าที่แผ่นตัวนำ

$$\rho_{S1} = D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{V_0}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}$$

จากความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าที่ผิวตัวนำ ประจุไฟฟ้าที่ผิวตัวนำขนาด S เป็น $Q = \rho_S S$ ดังนั้น

$$C = \frac{Q}{V_O} = \frac{\rho_S S}{V_O} = \frac{1}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2 S}} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$$

ส่วนในกรณีที่มีการต่อเชื่อมฉนวนในลักษณะที่เป็นขนานกัน พิจารณาจากเงื่อนไขขอบเขตในแนวสัมผัสกับขอบเขตจะได้ว่า $E_1 = E_2 = \dfrac{V_0}{d} \rightarrow \dfrac{D_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\rho_{S1}}{\varepsilon_1} = \dfrac{\rho_{S2}}{\varepsilon_2} = \dfrac{D_2}{\varepsilon_2}$ จะได้ $\rho_{S2} = \dfrac{\rho_{S1}}{\varepsilon_1}\varepsilon_2$ และ

$E_1 = \dfrac{D_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\rho_{S1}}{\varepsilon_1} = \dfrac{V_0}{d} \rightarrow V_0 = \dfrac{\rho_{S1}}{\varepsilon_1} d$ และจาก $Q = \rho_{S1} S_1 + \rho_{S2} S_2$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_{S1} S_1 + \rho_{S2} S_2}{\dfrac{\rho_{S1}}{\varepsilon_1} d}$$

$$C = \frac{\rho_{S1} S_1 + \dfrac{\rho_{S1}}{\varepsilon_1}\varepsilon_2 S_2}{\dfrac{\rho_{S1}}{\varepsilon_1} d} = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2$$

ตัวอย่าง หาค่าความจุไฟฟ้าของ

(a) สาย coaxial มีความยาว 1 m เส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 2.5 mm เส้นผ่าศูนย์กลางรอบในของด้านนอกเป็น 5.5 mm ระหว่างเส้นผ่าศูนย์กลางทั้งสองเป็นฉนวนไฟฟ้าที่มีค่า Relative permittivity $\varepsilon_r = 2$

ค่าความจุไฟฟ้าของ Coaxial หาได้จาก

$$C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0(1)}{\ln(2.75mm/1.25mm)} = 0.141\mu F$$

(b) ตัวนำที่เป็นทรงกลมรัศมี2.5 mm เคลือบด้วย ฉนวนที่มีค่า Relative permittivity 2.26 หนา 2 mm ล้อมรอบด้วยตัวนำรัศมี 4.5 mm

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

$$C = \frac{4\pi 2.26\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{2.5mm} - \frac{1}{4.5mm}\right)} = 1.4125\,pF$$

(c) แผ่นตัวนำสองแผ่นที่บางมาก ขนาด กว้างและยาว 5 และ 4 cm ตามลำดับ ซึ่งระหว่างแผ่นตัวนำมีฉนวนไฟฟ้าสามชนิดที่มีความหนา 0.1, 0.2 และ 0.4 mm มีค่า Dielectric constant เป็น 1, 2 และ 3 (Relative permittivity)

ทางกายภาพเป็นการต่อความต้านทานแบบอนุกรมซึ่งจะได้ผลรวมความจุไฟฟ้าเป็น

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 S_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 S_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r3}\varepsilon_0 S_3}}$$

$S_1 = S_2 = S_3 = 5 \times 4 \times 10^{-4} = 0.0020\ m^2$

$$C = \frac{1}{\frac{0.0001}{1\varepsilon_0 0.0020} + \frac{0.0002}{2\varepsilon_0 0.0020} + \frac{0.0004}{3\varepsilon_0 0.0020}} = 36.6\,pF =$$