บทที่ 4 พลังงานและศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากไฟฟ้าสถิตย์

วัตถุประสงค์

1. เพื่อเป็นการศึกษาพลังงานและศักย์ไฟฟ้าจากไฟฟ้าสถิต
2. ลักษณะของไดโพลโมเมนต์

4.1 พลังงานในการเคลื่อนประจุไฟฟ้าในสนามไฟฟ้า

จากนิยามของความเข้มสนามไฟฟ้าที่กล่าวว่า ความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุดหนึ่งมีค่าเทียบได้กับแรงที่เกิดกับประจุไฟฟ้า หนึ่งหน่วยที่จุดนั้น ซึ่งค่าที่ต้องการหาคือค่าเวกเตอร์สนามนั้น ซึ่งถ้าเป็นประจุ Q แรงเนื่องจากสนามไฟฟ้านี้มีค่าเป็น

$$\overline{F}_E = Q\overline{E}$$

แต่แรงที่ใส่เข้าไปหรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า แรงจากภายนอกจะต้องให้เข้าไปจะมีค่าเท่ากับแรงที่เกิดจากประจุไฟฟ้าแต่มีทิศทางตรงกันข้าม

$$\overline{F}_{appl} = -Q\overline{E}$$

ดังนั้น งานที่ที่สัมพันธ์กับประจุเคลื่อนที่ ในระยะ $d\overline{L}$ นั้น สามารถหาได้จาก

$$dW = -Q\overline{E}\cdot d\overline{L}$$

งานที่ใช้ในการเคลื่อนที่ประ จุไฟฟ้าในแนวตลอดเส้นทางเดิน คำนวณได้โดย

$$W = -Q\int_{begin}^{final}\overline{E}\cdot d\overline{L}$$

(ในการ อินทิเกรตตามเส้นทางเดินนั้น ต้องระวังว่าเป็นการอินทิเกรตชั้นเดียวไม่ใช่เป็นการอินทิเกรตสามชั้น ดังนั้นต้อง แยกเป็นการอินทิเกรตแต่ละองค์ประกอบ ถ้าเป็น x,y,z คือ ให้แยกเป็นอินทิเกรตแต่ละตัว แล้วค่อยหารวม ห้ามอินทิเกรตสามชั้นเด็ดขาด)

D4.1 An electric field is given as $\overline{E} = 6y^2z\overline{a_x} + 12xyz\overline{a_y} + 6xy^2\overline{a_z}$ V/m. An increment path is $\Delta\overline{L} = -3\overline{a_x} + 5\overline{a_y} - 2\overline{a_z}$ micro-meter. Find the work done in moving a 2 micro-coulomb charge along this path if the location of the path is at: (a) $P_A(0,2,5)$ (b) $P_B(1,1,1)$ and (c) $P_C(-0.7,-2,-0.3)$

4.2 การอินทิเกรตเชิงเส้น

จากส่วนที่ผ่านมาแล้วจะเป็นการหางานในการเคลื่อนที่ประจุไฟฟ้าในสนามไฟฟ้าในระยะทางสั้นๆ ในขนาดอนุพันธ์ ดังนั้น งานที่คำนวณจึงสามารถหาได้ในรูปแบบการคูณกันในเชิงเส้นโดยไม่ได้พิจารณาอยู่ในรูปการวิเคราะห์เวกเตอร์ แต่ในทางปฏิบัตินั้น

$$W = -Q\int_{begin}^{final}\overline{E}\cdot d\overline{L}$$

จะเป็นการรวมผลคูณของ ความยาวเล็กๆ ซึ่งค่าสนามที่จุดต่างๆ ที่ความยาวเล็กๆ เหล่านี้วางอยู่จะต้องทราบค่าซึ่งจะเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง ดังนั้น ในการหาผลรวมด้วยการอินทิเกรต จึงต้องมีการแทนตัวแปรของการอินทิเกรตให้เหลือ 1 ตัวแปรต่อการอินทิเกรต จากความสัมพันธ์ของเส้นทางเดินลงในฟังก์ชันของสนามไฟฟ้า แล้วค่อยทำการอินทิเกรตที่ตัวแปรนั้นๆ จากจุดเริ่มต้นถึงจุดปลายของเส้นทางเดิน ดูตัวอย่างประกอบ

ตัวอย่าง หางานที่ใช้ในการเคลื่อน ประจุ 2C จากจุด (1,0,1) to (0.8,0.6,1) ตามเส้นโค้งของวงกลม $x^2+y^2=1$, $z=1$ ในสนามไฟฟ้า $\overline{E} = y\overline{a_x} + y\overline{a_y} + 2\overline{a_z}$ V/m ในการ integrate นั้นจะใช้ ตรีโกณมิติ เข้ามาช่วย เสร็จแล้วค่อยแปลงกลับก่อนที่จะแทนค่าลิมิตของผลการอินทิเกรต

Example Find the work done in moving a 5 micro-coulomb charge from the origin to P(2,-1,4) through the field $\overline{E} = 2xyz\overline{a_x} + x^2 z\overline{a_y} + x^2 y\overline{a_z}$ V/m via the path: (a) straight line segments: (0,0,0) to (2,0,0) to (2,-1,0) to (2,--1,4); (b) straight line: x=-2y, z=2x; (c) curve: $x=-2y^3$, $z=4y^2$ (ทุกคำตอบเท่ากัน 80 uJ)

D4.2. Calculate the work done in moving a 4-C charge from $B(1,0,0)$ to $A(0,2,0)$ along the path $y = 2-2x$, $z = 0$ in the field $\mathbf{E} =$: (*a*) $5\mathbf{a}_x$ V/m; (*b*) $5x\mathbf{a}_x$ V/m; (*c*) $5x\mathbf{a}_x + 5y\mathbf{a}_y$ V/m.

Ans. 20 J; 10 J; −30 J

D4.3. We shall see later that a time-varying E field need not be conservative. (If it is not conservative, the work expressed by Eq. (3) may be a function of the path used.) Let $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x$ V/m at a certain instant of time, and calculate the work required to move a 3-C charge from (1, 3, 5) to (2, 0, 3) along the straight line segments joining: (*a*) (1, 3, 5) to (2, 3, 5) to (2, 0, 5) to (2, 0, 3); (*b*) (1, 3, 5) to (1, 3, 3) to (1, 0, 3) to (2, 0, 3).

Ans. −9 J; 0

4.3 ศักย์ไฟฟ้าและความต่างศักย์ไฟฟ้า

แรงจากภายนอกที่ใช้ในการเคลื่อนที่ประจุ Q จากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่งในสนามไฟฟ้า $\overline{E}$ เป็นนิยามของงาน

$$W = -Q\int_{init}^{final} \overline{E} \cdot d\overline{L}$$

เช่นเดียวกันกับการแสดงไว้แล้วว่า ในการเคลื่อนประจุ หนึ่งหน่วย ด้วยแรงซึ่งแรงนี้ถูกนิยามให้เป็นความเข้มสนามไฟฟ้า งานที่ใช้จากแรงภายนอกกับประจุหนึ่งหน่วยจากจุดหนึ่งไปอีกจุดหนึ่ง ในสนามไฟฟ้า นิยามเป็น ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้า

$$\text{ค่าความต่างศักย์} = V = -\int_{init}^{final} \overline{E} \cdot d\overline{L}$$

หน่วยความต่างศักย์คือ Jules/coulomb หรือ โวลต์ ดังนั้น ความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่าง จุดสองจุดใดๆ (A,B) ในสนามไฟฟ้าเป็น

$$V_{AB} = -\int_{B}^{A} \overline{E} \cdot d\overline{L}$$

สนามไฟฟ้าจากเส้นประจุที่มีประจุไฟฟ้ากระจายสม่ำเสมอ ρ_L C/m ค่าความต่างศักย์ระหว่างจุด A, B หรือในความหมายของงานในการเคลื่อนประจุไฟฟ้า หนึ่งประจุจาก B->A โดยที่ ระยะทางจากจุดทั้งสองไปยังเส้นประจุเป็น a และ b ตามลำดับ

$$V_{AB} = -\int_{B}^{A} \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\overline{a}_r \cdot dr\overline{a_r} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}(-\ln a + \ln b)$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$= \frac{W}{Q}$$

ถ้าเป็นจุดประจุ Q สนามไฟฟ้ารอบจุดประจุนี้เป็น $\overline{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overline{a_r}$ ดังนั้น ความต่างศักย์ระหว่างจุดสองจุดในสนามไฟฟ้านี้สามารถหาได้จาก

$$V_{AB} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overline{a_r} \cdot dr\overline{a_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

ที่จุด A ใดๆ ในสนามไฟฟ้าจะมีค่าศักย์ไฟฟ้าอยู่ซึ่งในความหมายแล้วคือเป็นงานที่ใช้จากการเคลื่อนประจุหนึ่งหน่วยจาก จุดอนันต์มายังจุดๆ นั้น ภายใต้สนามไฟฟ้า ซึ่งแทนด้วย V_A ดังนั้น ความต่างศักย์ระหว่างสองจุดสามารถหาได้จาก

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

D4.4. An electric field is expressed in cartesian coordinates by $\mathbf{E} = 6x^2\mathbf{a}_x + 6y\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ V/m. Find: (*a*) V_{MN} if points M and N are specified by $M(2, 6, -1)$ and $N(-3, -3, 2)$; (*b*) V_M if $V = 0$ at $Q(4, -2, -35)$; (*c*) V_N if $V = 2$ at $P(1, 2, -4)$.

Ans. −139.0 V; −120.0 V; 19.00 V

(Integrate electric field intensity dot differential vector distance $d\overline{L} = dx\overline{a_x} + dy\overline{a_y} + dz\overline{a_z}$ *(in Cartesian coordinates).)*

D4.5. A 15-nC point charge is at the origin in free space. Calculate V_1 if point P_1 is located at $P_1(-2, 3, -1)$ and: (*a*) $V = 0$ at $(6, 5, 4)$; (*b*) $V = 0$ at infinity; (*c*) $V = 5$ V at $(2, 0, 4)$

Ans. 20.7 V; 36.0 V; 10.89 V

(It means that there is not only the electric field from the point charge as the potential fields at other points effecting from other electric fields. The external electric field or from unknown sources are set to be a uniform field.)

4.4 สนามศักย์ไฟฟ้าในระบบประจุไฟฟ้า (The potential field of a system of charges)

จากประจุไฟฟ้า Q_1 ที่ตำแหน่ง r_1 (อ้างอิงหรือวัดจากจุดอ้างอิงเดียว) ศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่ง r หาได้โดย

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \left|\overline{r} - \overline{r_1}\right|}$$

ถ้าเป็นสนามศักย์ไฟฟ้าที่จุดหนึ่งๆ เป็นผลจากจุดประจุหลายตัวที่อยู่ที่ตำแหน่งต่างๆ

$$V_r = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_0 \left|\overline{r} - \overline{r_m}\right|}$$

ถ้าแต่ละจุดเป็นประจุที่หาได้จากผลคูณของ ความหนาแน่นประจุเชิงปริมาตรกับปริมาตรขนาดเล็กๆ สนามศักย์ไฟฟ้าที่จุด r เป็น

$$V(r) = \frac{\rho_v(r_1)\Delta v_1}{4\pi\varepsilon_0 \left|\overline{r} - \overline{r}_1\right|} + \frac{\rho_v(r_2)\Delta v_2}{4\pi\varepsilon_0 \left|\overline{r} - \overline{r}_2\right|} + \ldots\ldots + \frac{\rho_v(r_n)\Delta v_n}{4\pi\varepsilon_0 \left|\overline{r} - \overline{r}_{n1}\right|}$$

หรือจัดเป็นรูปอินทิเกรตเป็น

$$V(r) = \int_{vol} \frac{\rho_v(r')dv'}{4\pi\varepsilon_0 \left|\overline{r} - \overline{r'}\right|}$$

เมื่อประไฟฟ้าเป็นแบบเส้นประจุและแผ่นประจุ ที่มีการกระจายสม่ำเสมอ สนามศักย์ไฟฟ้าสามารถหาได้โดยพิจารณาแยกกันในเชิงประจุไฟฟ้ากับระยะทางจากจุดที่ต้องหาค่าศักย์ไฟฟ้าเป็นอิสระต่อกัน

$$V(r) = \int \frac{\rho_L(r')dL'}{4\pi\varepsilon_0 \left|\overline{r} - \overline{r'}\right|}$$

$$V(r) = \int \frac{\rho_s(r')ds'}{4\pi\varepsilon_0\left|\overline{r} - \overline{r'}\right|}$$

ศักย์ไฟฟ้าที่จุดใด จะเป็นการวัดความต่างศักย์เทียบกับจุดอ้างอิงซึ่งโดยทั่วไปมีค่าเป็นศูนย์ (ที่จุดที่ห่างจากจุดประจุไฟฟ้า infinity) หรือหมายถึงการเคลื่อนประจุไฟฟ้าหนึ่งหน่วยจากจุด infinity มายังจุด A ใดๆ

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \overline{E} \cdot d\overline{L}$$

ในกฎการอนุรักษ์ หรือ กฎของการหาค่างานนั้นจะมีข้อหนึ่งที่จะนำมาใช้กับงานในการเคลื่อนประจุไฟฟ้า หนึ่งหน่วยไปตามเส้นทางปิด (เดินทางกลับมายังจุดเดิม) จะมีค่าเป็น ศูนย์

$$-\oint \overline{E} \cdot d\overline{L} = 0$$

ซึ่งจะสัมพันธ์กับกฎของ Kirchhoff's voltage Law

4.5 The Potential Gradient

จากการหาค่าสนามศักย์ไฟฟ้าจากสนามไฟฟ้า

$$V = -\int \overline{E} \cdot d\overline{L}$$

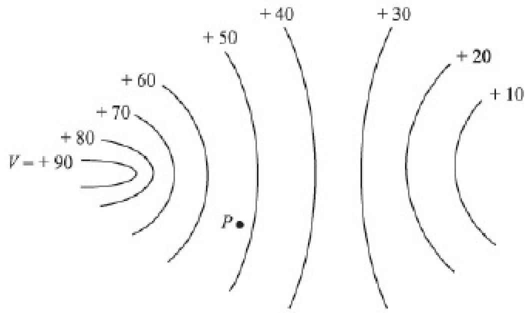
จากสมการข้างต้น สนามไฟฟ้าก็สามารถหาได้ในทางกลับกัน

$$\Delta V = -\overline{E} \cdot d\overline{L} = -E\Delta L \cos\theta$$

$$\frac{dV}{dL} = -E\cos\theta$$

จะเห็นว่าความสัมพันธ์ข้างต้นจะมีการเปลี่ยนแปลงกับมุมระหว่าง สนามไฟฟ้ากับ ทิศทางที่มีการเปรียบเทียบ แต่อย่างไรก็ตาม ค่าสูงที่สุดทางด้านซ้ายมือก็คือค่าของสนามไฟฟ้านั้นเอง ซึ่งค่าที่สูงที่สุด เมื่อ θ เท่ากับ 0 องศา คืออยู่ในแนวตั้งฉากกับเส้นค่าสนามศักย์ไฟฟ้า

$$\left.\frac{dV}{dL}\right|_{\max} = -E$$



รูปซ้ายมือ คือ รูปที่แสดงสนามศักย์ไฟฟ้าเป็นภาพหน้าตัด แต่ละเส้นเป็นเส้นที่แสดงค่าศักย์ไฟฟ้าที่มีค่าเท่ากันบนตลอดบนเส้นนั้น ซึ่งชื่อเฉพาะเป็น equipotential surface ซึ่งแต่ละจุดบนผิวนี้จะมีเวกเตอร์ที่ตั้งฉากอยู่

$$\overline{E} = -\left.\frac{dV}{dL}\right|_{\max} \overline{a_N}$$

$$\overline{E} = -\frac{dV}{dN}\overline{a_N}$$

ในระบบ Cartesian

$$\frac{d}{dN}\overline{a}_N = \frac{\partial}{\partial x}\overline{a_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{a_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{a_z}$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่าง สนามไฟฟ้าและสนามศักย์ไฟฟ้าเป็น

$$\overline{E} = -gradV = -\nabla V$$

$$\overline{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\overline{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\overline{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\overline{a}_z \right)$$

$$\text{grad V} = \frac{\partial V}{\partial x}\overline{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\overline{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\overline{a}_z$$

สำหรับระบบพิกัดอื่น Gradient ของสนามใดๆ สามารถหาได้จาก

$$\nabla V = \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u}\overline{a}_u + \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial v}\overline{a}_v + \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial w}\overline{a}_w$$

โดย ที่ u, v and w แทนค่าขนาดที่เกิดในพิกัดต่างๆ เช่นในระบบ Cartesian u=x, v=y, w=z; Cylindrical u=r, $v = r\phi$, w=z; Spherical u=r, $v = r\theta$, $w = r\sin\theta\phi$

ตัวอย่างเช่น ค่า h_1, h_2, h_3 หาได้จาก spherical du = $h_1$dr = dr dv = $rd\theta$ =$h_2\,d\theta$ dw = $r\sin\theta d\phi$ = $h_3\,d\phi$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\overline{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\overline{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\overline{a}_z \qquad \text{(Cartesian)}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\overline{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\overline{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\overline{a}_z \qquad \text{(Cylindrical)}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\overline{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overline{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\overline{a}_\phi \qquad \text{(Spherical)}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้สนามศักย์ไฟฟ้าใน free space $V = \frac{60\sin\theta}{r^2}$ V กำหนดให้ จุด P (r = 3 m, θ = 60 องศา และ ϕ = 25 องศา) จงหา (a) V_P; (b) $\overline{E_P}$; (c) dV/dN at P; (d) $\overline{a}_N$ at P; (e) ρ_v at P

(a) $V_P = \frac{60\sin(60^\circ)}{3^2}$ =5.77 Volts (แทนค่า รัศมีและมุมที่จุด P ลงไป)

(b)

$$\overline{E}_P = -\nabla V = -\left(\frac{\partial(60\sin\theta / r^2)}{\partial r}\overline{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial(60\sin\theta / r^2)}{\partial\theta}\overline{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(60\sin\theta / r^2)}{\partial\phi}\overline{a}_\phi \right)$$

$$\overline{E}_P = -\left(-2\frac{60\sin(60^\circ)}{3^3}\right)\overline{a}_r - \frac{1}{3}\left(\frac{60\cos(60^\circ)}{3^2}\right)\overline{a}_\theta$$

$$= 3.85\overline{a}_r - 1.11\overline{a}_\theta \qquad \text{V/m}$$

(c) จาก $\overline{E} = -\frac{dV}{dN}\overline{a}_N$ ดังนั้น $\frac{dV}{dN}$ เป็นขนาดของเวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้า

$$\frac{dV}{dN} = \sqrt{3.85^2 + (-1.11)^2} = 4.01 \qquad \text{V/m}$$

(d) $\overline{a}_N$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่มีทิศตรงข้ามกับ เวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้า

$$\overline{a}_N = \frac{\overline{E}}{\left|\overline{E}\right|} = \frac{-3.85\overline{a}_r + 1.11\overline{a}_\theta}{4.01} = -0.961\overline{a}_r + 0.277\overline{a}\theta$$

(e) จาก Divergence Theorem $\rho_v = \nabla\cdot\overline{D} = \nabla\cdot\varepsilon_0\overline{E}$

จะต้องเป็น divergence ของ spherical coordinates

$$\nabla\cdot\overline{D}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(\frac{r^2\varepsilon_0 120\sin\theta}{r^3}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(-\sin\theta\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 60\cos\theta}{r^2}\right)}{\partial\theta}$$

$$=\frac{1}{r^2}\left(\frac{-\varepsilon_0 120\sin\theta}{r^2}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_0 60(-\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{r^2}\right)$$

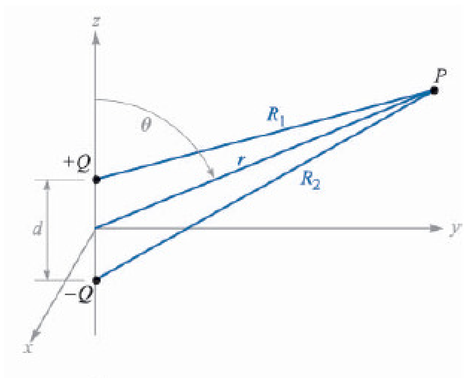
= -11.34p+3.78p = -7.56 pC/m^3

4.6 ไดโพล (Dipole or electric dipole)

นิยามของ ไดโพล คือประจุที่มีขนาดเท่ากันแต่เป็นประจุตรงข้าม วางห่างกันระยะ d เล็กๆ

จะเห็นได้ว่าศักย์ไฟฟ้ารวมที่จุด P ที่เกิดจากประจุทั้งสองจาก

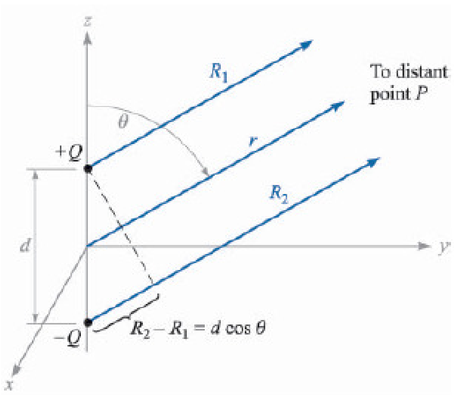
$$V_A=-\int_{\infty}^{A}\overline{E}\cdot d\overline{L}=-\int_{\infty}^{r_A}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\left.\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_{\infty}^{r_A}$$



$$V_P=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_1R_2}{R_1-R_2}\right)$$

ในกรณีที่ d มีค่าเล็กมากเมื่อเทียบกับ r ซึ่งทำให้สามารถคิดเป็น farfield ดังรูปด้านล่าง



$R_2-R_1=d\cos\theta$ และ $R_1=R_2=r$ ดังนั้น

$$V=\frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

ที่ระนาบ x-y ที่ z = 0 ศักย์ไฟฟ้ามีค่าเป็น 0 (theta = 90 degree)

ใช้ Gradient ใน spherical coordinates จะได้

$$\overline{E}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\overline{a}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\overline{a}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\overline{a}_\phi\right)$$

$$\overline{E}=\frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\overline{a}_r+\sin\theta\overline{a}_\theta\right)$$

ไดโพลโมเมนต์ นิยาม ด้วย $\overline{p}=Q\overline{d}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ค่าหนึ่งที่มีความสำคัญและจะมีการใช้ในบทต่อไปที่จะกล่าวถึงวัสดุฉนวนไฟฟ้า

ในการหาค่าศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากไดโพลได้เป็น

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\left|\overline{r}-\overline{r}'\right|^2}\overline{p}\cdot\frac{\overline{r}-\overline{r}'}{\left|\overline{r}-\overline{r}'\right|}$$

$\overline{r},\overline{r}'$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดที่ต้องการหาค่าศักย์ไฟฟ้าและตำแหน่งจุดศูนย์กลางของไดโพล

D4.9. An electric dipole located at the origin in free space has a moment $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ nC · m. (*a*) Find V at $P_A(2, 3, 4)$. (*b*) Find V at $r = 2.5$, $\theta = 30°$, $\phi = 40°$.

Ans. 0.230 V; 1.973 V

D4.10. A dipole of moment $\mathbf{p} = 6\mathbf{a}_z$ nC · m is located at the origin in free space. (*a*) Find V at $P(r = 4, \theta = 20°, \phi = 0°)$. (*b*) Find $\mathbf{E}$ at P.

Ans. 3.17 V; $1.584\mathbf{a}_r + 0.288\mathbf{a}_\theta$ V/m

4.7 ความเข้มพลังงานในสนามไฟฟ้าสถิตย์

สมมติระบบใน free space เริ่มจาก นำประจุไฟฟ้า Q_1 มาวางในระบบ ไม่ต้องใช้งานเข้าไปเนื่องจากไม่มีสนามไฟฟ้าใดๆ ในระบบนี้ เมื่อทำการนำเอา Q_2 เข้ามาวางในระบบ จะต้องมีการทำงาน เนื่องจากในระบบมีศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุที่มีอยู่แล้ว

$$\text{งานในการวางประจุ } Q_2 = Q_2 V_{2,1}$$

เช่นเดียวกันในการวาง Q_3 ในระบบ

$$\text{งานในการวางประจุ } Q_3 = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$$

$$\text{งานในการวางประจุ } Q_4 = Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$$

งานที่ทำในการวางประจุเป็น

$$W_E = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \ldots\ldots$$

จากค่าศักย์ไฟฟ้าเป็นการหาปริมาณสเกลลาร์ดังนั้น

$$Q_2 V_{2,1} = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}} = Q_1 V_{1,2}$$

ถ้าสมการข้างต้นแทนด้วยรูปที่เท่ากันนี้จะได้เป็น

$$W_E = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{4,1} + Q_4 V_{4,3} + \ldots\ldots$$

เมื่อรวมสมการของงานที่ทั้งสองข้างต้นจะได้

$$\begin{aligned} 2W_E &= Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \ldots) + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \ldots) \\ &+ Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \ldots) + Q_4(V_{4,1} + V_{4,2} + V_{4,3} + \ldots) \\ &+ \ldots\ldots \end{aligned}$$

เนื่องจากผลรวมของศักย์ไฟฟ้าที่จุดใดๆ เป็นนิยามของค่าความต่างศักย์ที่จุดนั้น

$$V_1 = V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \ldots$$

ดังนั้น งานในการวางประจุในระบบประจุไฟฟ้าเป็น

$$W_E = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \ldots\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} Q_m V_m$$

ถ้าเป็นการวางประจุที่มีความต่อเนื่อง

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \rho_v V dv$$

เราจะทำการเปลี่ยนรูปสมการให้อยู่ในรูปของ ความเข้มของสนามไฟฟ้าและความหนาแน่นของเส้นแรงไฟฟ้า $\overline{E}, \overline{D}$ ด้วยการแทนค่า $\rho_v = \nabla \cdot \overline{D}$ (สมการที่ 1 Maxwell) ก่อนอื่นให้พิจารณารูปแบบ ไดเวอร์เจนต์ของผลคูณเป็น

$$\nabla \cdot \left(V\overline{D}\right) = V\left(\nabla \cdot \overline{D}\right) + \overline{D} \cdot \left(\nabla V\right)$$

ดังนั้น

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \rho_v V dv = \frac{1}{2}\int_{vol} V\left(\nabla \cdot \overline{D}\right) dv = \frac{1}{2}\int_{vol} \left[\nabla \cdot \left(V\overline{D}\right) - \overline{D} \cdot \left(\nabla V\right)\right] dv$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \nabla \cdot \left(V\overline{D}\right) dv - \frac{1}{2}\int_{vol} \overline{D} \cdot \left(\nabla V\right) dv$$

$$W_E = \frac{1}{2}\oint_S \left(V\overline{D}\right) \cdot d\overline{S} - \frac{1}{2}\int_{vol} \overline{D} \cdot \left(\nabla V\right) dv$$

พจน์แรกเปลี่ยนมาเป็น อินทิเกรตพื้นผิวจากบทที่ผ่านมาเป็นความสัมพันธ์ระหว่างการอินทิเกรตปริมาตรกับพื้นผิว และในการอินทิเกรตรอบพื้นผิวปิดที่ใหญ่มากๆ นี้ จะมีค่าเป็นศูนย์จากกรณีที่ ทั้งสนามศักย์ไฟฟ้าและความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้ามีค่าเข้าสู่ศูนย์ในพื้นที่ใหญ่ และเมื่อแทนพจน์แรกเป็น 0 แล้ว

$$W_E = -\frac{1}{2}\int_{vol} \overline{D} \cdot \left(\nabla V\right) dv$$

และเมื่อแทนค่าสนามไฟฟ้าจาก $\overline{E} = -\nabla V$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} \overline{D} \cdot \overline{E} dv = \frac{1}{2}\int_{vol} \varepsilon_0 \overline{E}^2 dv$$

$$\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2}\overline{D} \cdot \overline{E}$$

ตัวอย่าง หาค่าพลังงานที่สะสมใน free space สำหรับ พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย (0<r<a), (0< $\phi < \pi$), (0<z<2) เมื่อสนามศักย์ไฟฟ้าที่กำหนดให้เป็น (a) $V_0 r / a$; (b) $V_0 \left(r / a\right) \cos^2 \phi$

(a) $$\overline{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial \left(V_0 r / a\right)}{\partial r}\overline{a}_r + 0 + 0\right) = -\frac{V_0}{a}\overline{a}_r$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \frac{\varepsilon_0 V_0^2}{a^2} r dr d\phi dz = \frac{\varepsilon_0 V_0^2}{2a^2}\left(\frac{\pi a^2 2}{2}\right)$$

$$= 1.57\varepsilon_0 V_0^2$$

(b)

$$\overline{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial \left(V_0 \left(r / a\right)\cos^2 \phi\right)}{\partial r}\overline{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \left(V_0 \left(r / a\right)\cos^2 \phi\right)}{\partial \phi}\overline{a}_\phi + 0\right)$$

$$= -\frac{V_0 \cos^2 \phi}{a}\overline{a}_r + \frac{V_0 \cos 2\phi}{a}\overline{a}_\phi$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon_0 \overline{E}^2 dv$$

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_v \left(\left(-\frac{V_0 \cos \phi}{a}\right)^2 + \left(\frac{V_0 \sin 2\phi}{a}\right)^2\right) dv$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 V_0^2 \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = 1.372\varepsilon_0 V_0^2$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx,\ \text{ mostly used when } n \text{ positive}$$

D4.11. Find the energy stored in free space for the region $2\,\text{mm} < r < 3\,\text{mm}$, $0 < \theta < 90°$, $0 < \phi < 90°$, given the potential field $V =$: (*a*) $\frac{200}{r}$ V; (*b*) $\frac{300\cos\theta}{r^2}$ V.

Ans. 1.391 pJ; 36.7 J