บทที่ 1

การวิเคราะห์เวกเตอร์ (Vector Analysis)

วัตถุประสงค์

- เพื่อให้เข้าใจถึงสนามเวกเตอร์และสเกลลาร์
- เพื่อให้เข้าใจถึงการวิเคราะห์เวกเตอร์
- แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ที่อยู่ในพิกัดต่างๆ และสามารถแปลงเวกเตอร์ให้อยู่ในพิกัดต่างๆ ได้
- เพื่อนำเข้าสู่เนื้อหาต่อไปในเรื่องของสนามไฟฟ้าที่วิเคราะห์ด้วยสนามเวกเตอร์

1.1 ปริมาณสเกลลาร์และเวกเตอร์

โดยนิยามทั่วไป ปริมาณสเกลลาร์ จะบอกเฉพาะขนาด (magnitude)

ปริมาณเวกเตอร์ จะบอกหรือแสดงทั้งขนาดและทิศทาง (direction)

สนามสเกลลาร์มีตัวอย่างในการอธิบาย คือ การกระจายของอุณหภูมิในห้อง

สนามเวกเตอร์มีตัวอย่างในการอธิบาย คือ การกระจายของควันที่มีผลมาจากสนามเวกเตอร์ของความเร็วลม

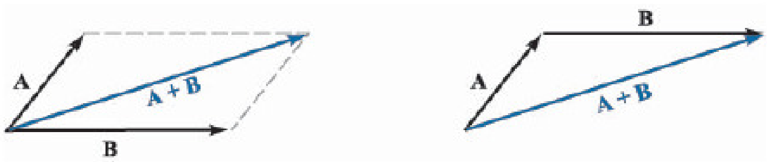
1.2 เวกเตอร์เลขคณิต (arithmetic vector)

- การบวกเวกเตอร์ (Vector addition) จะมีคุณสมบัติการสลับที่และการจัดกลุ่ม

$\overline{A}+\overline{B}=\overline{B}+\overline{A}$ การสลับที่

$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{C}+\overline{B}+\overline{A}=\left(\overline{A}+\overline{B}\right)+\overline{C}=\overline{A}+\left(\overline{B}+\overline{C}\right)$ การสลับที่และการเปลี่ยนกลุ่ม

ซึ่งสามารถหาหรือแสดงได้ในรูปภาพ ดังนี้



ในกรณีที่เวกเตอร์ที่อยู่ในระนาบเดียวกันจะถูกเรียกว่าเป็น Coplanar vector ตัวอย่างเช่นเวกเตอร์ดังรูปข้างต้น

- การลบเวกเตอร์ (Vector subtraction) มีคุณสมบัติเช่นเดียวกับการบวกเพียงเวกเตอร์ตัวลบ(ในเชิงรูปภาพ)จะมีการทิศทางทำมุมกับตัวของมันเอง 180 องศา
- การคูณเวกเตอร์ มี 2 แบบ
    - Dot product การคูณแบบ dot หรือ แบบเชิงสเกลลาร์
    - Cross product การคูณแบบ cross หรือ แบบเชิงเวกเตอร์

Dot product ผลจากการคูณจะเป็นปริมาณสเกลลาร์

$\overline{A}\bullet\overline{B}=\left|\overline{A}\right|\left|\overline{B}\right|\cos\theta_{AB}$ (แจงความหมายและนิยาม)

การใช้งานของ dot product ที่เห็นได้ชัดที่สุดคือ การคำนวณหางานที่ แรง กระทำในระยะทางที่เคลื่อนที่(การกระจัด)

Cross product จะได้ผลคูณเป็นเวกเตอร์

$\overline{A}\times\overline{B}=\overline{a_n}\left|\overline{A}\right|\left|\overline{B}\right|\sin\theta_{AB}$ $\overline{a_n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบ A-B โดยใช้กฎมือขวาประกอบ โดยที่ขนาดของเวกเตอร์ผลลัพธ์ก็คือขนาดของพื้นที่รูปเรขาคณิตที่มีด้านประกอบคือ $\overline{A}$ กับ $\overline{B}$ และสามารถคำนวณได้จาก determinant ข้างล่างนี้ สมมติว่าเวกเตอร์ทั้งสองอยู่ในระบบพิกัด (x,y,z)

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \overline{A_x} & \overline{A_y} & \overline{A_z} \\ \overline{B_x} & \overline{B_y} & \overline{B_z} \end{vmatrix}$$

1.3 ขนาดของเวกเตอร์และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ในระบบพิกัด (x,y,z) (cartesian)

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน (x,y,z) คือ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ หรือ $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ หรือ $\overline{a_x}, \overline{a_y}, \overline{a_z}$

ขนาดของเวกเตอร์ที่อยู่ในในระบบพิกัด (x,y,z) $\overline{A} = A_x \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \bar{k}$ สามารถหาได้โดย

$$\left|\overline{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวเดียวกับเวกเตอร์ $\overline{A}$ เขียนแทนด้วย $\overline{a_A}$ หาได้จาก

$$\overline{a_A} = \frac{\overline{A}}{\left|\overline{A}\right|} = \frac{A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k}}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}}$$

$$\overline{a_A} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}}\bar{i} + \frac{A_y}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}}\bar{j} + \frac{A_z}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}}\bar{k}$$

1.4 ระบบพิกัดทรงกระบอก(หน้าตัดวงกลม)

บอกตำแหน่งด้วย r, ϕ, z รัศมีของทรงกระบอก, มุมที่ทำกับแกน x บนระนาบ x-y ($0 - 2\pi$), และความสูงของทรงกระบอกตามลำดับ

$r \perp \phi \perp z$ (r บางทีแทนด้วย ρ)

- พื้นที่ผิวด้านข้างขนาดเล็กๆ นิยามโดย $ds_r = rd\phi dz$ โดย normal vector อยู่ในแนวรัศมี (จากการเทียบ มุม 2π เรเดียน ได้ความยาวรอบรูปเป็น $2\pi r$ ดังนั้น $d\phi$ ได้ความยาวเป็น $rd\phi$)
- $ds_z = rd\phi dr$ ฝาของทรงกระบอก (normal vector อยู่ในแนว z)
- $ds_\phi = drdz$ พื้นที่หน้าตัดรูปสี่เหลี่ยม (normal vector อยู่ในแนว ϕ)
- ปริมาตรเล็กๆ นิยามโดย $dv = rdrd\phi dz$
- ความสัมพันธ์ระหว่าง (x,y,z) กับ (r, ϕ, z) เป็น

$$x = r\cos\phi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\phi \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$z = z$$

การแปลงพิกัดระหว่าง (x,y,z) กับ (r, ϕ, z) ความสัมพันธ์ข้างต้นจะเป็นจะสามารถใช้ได้โดยตรงถ้าจุดอ้างอิงหรือจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อยู่ที่จุด (0,0,0) แต่อย่างไรก็ตาม ความสัมพันธ์ข้างต้นนี้จะถูกนำมาใช้ในการประกอบในการการแปลงเวกเตอร์ระหว่างพิกัดทั้งสอง

เวกเตอร์ในคาร์เทเซียน

$$\overline{A} = A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k}$$

เวกเตอร์ในพิกัดทรงกระบอก

$$\overline{A} = A_r\overline{a_r} + A_\phi\overline{a_\phi} + A_z\overline{a_z}$$

ดังนั้นแล้ว

$$A_r = \overline{A} \bullet \overline{a_r}\ ,\ A_\phi = \overline{A} \bullet \overline{a_\phi}\ \text{ และ }\ A_z = \overline{A} \bullet \overline{a_z}$$

แทนเวกเตอร์ข้างต้นด้วย เวกเตอร์ในพิกัดคาร์เทเชียน จึงได้เป็น

$$A_r = \left(A_x\overline{i} + A_y\overline{j} + A_z\overline{k}\right) \bullet \overline{a_r} = A_x\overline{i} \bullet \overline{a_r} + A_y\overline{j} \bullet \overline{a_r}$$

$$A_\phi = \left(A_x\overline{i} + A_y\overline{j} + A_z\overline{k}\right) \bullet \overline{a_\phi} = A_x\overline{i} \bullet \overline{a_\phi} + A_y\overline{j} \bullet \overline{a_\phi}$$

$$A_z = \left(A_x\overline{i} + A_y\overline{j} + A_z\overline{k}\right) \bullet \overline{a_z} = A_z$$

จากกราฟประกอบและตรีโกณมิติจะได้ความสัมพันธ์ของ dot product ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยดังนี้

	$\overline{a_r}$	$\overline{a_\phi}$	$\overline{a_z}$
$\overline{i}$	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
$\overline{j}$	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\overline{k}$	0	0	1

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ความสัมพันธ์เป็น

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

P1.1 *Points A(x=2,y=3,z=-1) and B(r=5, $\phi = 53^\circ$,z=2), (a) calculate the distance from A to B; (b)assume that vectors $\overline{A}$ and $\overline{B}$ are vector at the original to point A and B, respectively, find a vector $\overline{A} + \overline{B}$ (Cartesian coordinates)*

P1.2 *Transform each of the following vectors to cylindrical coordinates at the point specified: (a) 5$\overline{i}$ at point P(r=4, $\phi = 120^\circ$,z=2); (b) 5$\overline{i}$ =at point Q(x=3,y=4,z=-1); (c) 4$\overline{i}$ -2$\overline{j}$ -4$\overline{k}$ at point A(x=2,y=3,z=5)*

1.5 ระบบพกัดทรงกลม

บอกพิกัดตำแหน่งด้วย r,θ,ϕ ซึ่งก็คือ รัศมี, มุมที่ทำกับแกน z ($0-\pi$) และ มุมที่ทำกับแกน x บนระนาบ x-y

- พื้นที่ผิวด้านข้างขนาดเล็กๆ นิยามโดย $ds_r = rd\theta \bullet r\sin\theta d\phi = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ โดย normal vector อยู่ในแนวรัศมี
- $ds_\theta = r\sin\theta d\phi dr$ พื้นผิวตัดที่ (normal vector อยู่ในแนว θ)
- $ds_\phi = rd\theta dr$ พื้นผิวตัดที่ (normal vector อยู่ในแนว ϕ)
- ปริมาตรเล็กๆ นิยามโดย $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$
- ความสัมพันธ์ระหว่าง (x,y,z) กับ (r,θ,ϕ) เป็น

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \qquad \theta = \cos^{-1}\frac{z}{r}$$

$$z = r\cos\theta \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Dot product of unit vector:

เช่น $\bar{i} \bullet \overline{a_r} = \sin\theta\cos\phi$ จะได้เริ่มจากการตกกระทบของเงาของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\overline{a_r}$ ไปบนระนาบ x-y แล้วค่อยพิจารณาต่อ และ $\bar{j} \bullet \overline{a_r} = \sin\theta\sin\phi$ ส่วน $\bar{k} \bullet \overline{a_r} = \cos\theta$ เป็นต้น โดยจะได้ความสัมพันธ์ของการแปลงระหว่างสองพิกัดดังนี้

	$\overline{a_r}$	$\overline{a_\theta}$	$\overline{a_\phi}$
$\bar{i}$	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
$\bar{j}$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
$\bar{k}$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

P1.3 *Points A(x=2,y=3,z=4) and B(r=4, $\theta = 30^\circ$, $\phi = 120^\circ$): find (a) the spherical coordinates of A; (b) a vector $\overline{A} + \overline{B}$ (Cartesian coordinates) assume that vectors $\overline{A}$ and $\overline{B}$ are vector at the original to point A and B, respectively.*

P1.4 *Transform each of the following vectors to cylindrical coordinates at the point specified: (a) 5$\bar{i}$ at point P(r=4, $\phi = 30^\circ$, $\phi = 120^\circ$); (b) 5$\bar{i}$ =at point Q(x=2,y=3,z=-1); (c) 4$\bar{i}$ -2$\bar{j}$ -4$\bar{k}$ at point A(x=-2,y=-3,z=5)*

เอกสารอ้างอิงและเพิ่มเติม

- **"Engineering Electromagnetics"** William H. Hayt Jr. and John A. Buck , 6th Edition, McGraw-Hill
- **"คลื่นและแม่เหล็กไฟฟ้า"** เฉลิมพล น้ำค้าง, ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ