บทที่ 3 ความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนต์

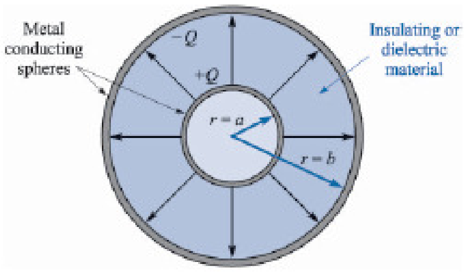
วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาจำนวนเส้นแรงไฟฟ้าจากประจุไฟฟ้าอิสระ

หาค่าความหนาแน่นของเส้นแรงไฟฟ้า โดยอาศัย กฎของเกาส์และ ไดเวอร์เจนต์

ประยุกต์ใช้งาน กฎของเกาส์และ ไดเวอร์เจนต์ได้อย่างถูกต้อง

3.1 ความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้า (Electrical flux density)



Faraday ได้ทำการทดลองด้วยรูปที่แสดงทางด้านขวามือ ระหว่างทรงกลมทั้งสองนั้น จะมีกลุ่ม displacement ซึ่งจะอ้างถึง เส้นแรงจากทรงกลมข้างในไปยังทรงกลมด้านนอก displacement flux ซึ่งก็คือ electric flux และยังแสดงให้เห็นว่ากลุ่มเส้นแรงไฟฟ้าเหล่านี้เป็นผลเนื่องจากประจุไฟฟ้าที่อยู่ภายใน ดังนั้น

$$\psi = Q \qquad \text{คูลอมบ์}$$

โดยที่ ψ คือเส้นแรงไฟฟ้า และ Q เท่ากับ $-Q$

ถ้าพิจารณา จำนวนเส้นแรงไฟฟ้าระหว่างทรงกลมรนั้น ความหนาแน่นของเส้นแรงสามารถหาได้จาก จำนวนเส้นแรงหารด้วยพื้นผิว $\psi/(4\pi r^2)$ หรือ $Q/(4\pi r^2)$ C/m^2 ซึ่งก็คือความหนาแน่นของเส้นแรงไฟฟ้า (Electric flux density)

ความหนาแน่นของเส้นแรงไฟฟ้าเป็นปริมาณเวกเตอร์โดยมีทิศทางเดียวกับความเข้มสนามไฟฟ้า จากทรงกลมรูปบนจะได้

$$\overline{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\overline{a}_r$$

จาก

$$\overline{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overline{a}_r$$

ใน Free space

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E}$$

พิจารณาสำหรับปริมาตรที่มีการกระจายของประจุ ρ_v Cuolomb/m^3 ดังนั้น ประจุไฟฟ้ารวม Q สามารถหาได้จากการอินทริเกรตปริมาตร จึงสามารถหา ความเข้มสนามไฟฟ้าและความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าเป็น

$$\overline{E} = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\overline{a_R} \qquad \text{V/m} \qquad \text{สำหรับตัวกลาง Free-space}$$

$$\overline{D} = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2}\overline{a_R} \qquad \text{Cuolomb/m}^2$$

D3.1. Given a 60-μC point charge located at the origin, find the total electric flux passing through: (*a*) that portion of the sphere $r = 26$ cm bounded by $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ and $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$; (*b*) the closed surface defined by $\rho = 26$ cm and $z = \pm 26$ cm; (*c*) the plane $z = 26$ cm.

Ans. 7.5 μC; 60 μC; 30 μC

D3.2. Calculate **D** in rectangular coordinates at point $P(2, -3, 6)$ produced by: (*a*) a point charge $Q_A = 55$ mC at $Q(-2, 3, -6)$; (*b*) a uniform line charge $\rho_{LB} = 20$ mC/m on the x axis; (*c*) a uniform surface charge density $\rho_{SC} = 120\ \mu\text{C/m}^2$ on the plane $z = -5$ m.

Ans. $6.38\mathbf{a}_x - 9.57\mathbf{a}_y + 19.14\mathbf{a}_z\ \mu\text{C/m}^2$; $-212\mathbf{a}_y + 424\mathbf{a}_z\ \mu\text{C/m}^2$; $60\mathbf{a}_z\ \mu\text{C/m}^2$

3.2 กฎของเกาส์

เส้นแรงไฟฟ้า 1 คูลอมบ์ สร้างจากประจุไฟฟ้า 1 คูลอมบ์

The electric flux passing through any closed surface is equal to the total charge enclosed by that surface.

ในการหาจำนวนเส้นแรงไฟฟ้าผ่านพื้นผิวเล็กๆ ใด ΔS คือผลรวมของจำนวนเส้นแรงไฟฟ้าที่ผ่านผิวนี้ สามารถคำนวณหาได้โดยผลคูณของจำนวนของเส้นแรงที่ตัดผ่านพื้นผิวนี้ ถ้า เส้นแรงทำมุม θ กับ Normal vector ของพื้นผิวนี้ ดังนั้น

$$\Delta\psi = \overline{D} \bullet \Delta\overline{S} = D\Delta S\cos\theta$$

ซึ่งถ้ามีหาผลรวมของเส้นแรงไฟฟ้าที่ผ่านพื้นผิวปิดทั้งหมดที่ล้อมรอบกลุ่มประจุนี้เป็น

$$\psi = \int d\psi = \oint \overline{D} \bullet dS \qquad \text{คูลอมบ์}$$

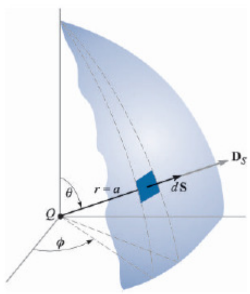
พิจารณาที่พิกัดต่างๆ จะได้ $dS = dxdy$, $rd\phi dr$ และ $r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ for Cartesian, cylindrical and spherical coordinates ซึ่งจะเป็นการอินทริเกรต 2 ชั้น จากสมการข้างต้นจะได้ว่าผลรวมของเส้นแรงไฟฟ้าในผิวปิดคือค่าประจุรวมที่พื้นผิวปิดนั้นล้อมรอบอยู่

$$\psi = \oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q \text{ =ประจุที่ถูกล้อมรอบอยู่}$$

ซึ่งประจุรวมหาได้จากประจุที่กระจายอยู่ $Q = \sum Q$ เส้นประจุ $Q = \int \rho_L dL$ ประจุกระจายที่พื้นผิว $Q = \int_S \rho_s dS$ และประจุในปริมาตร $Q = \int_{vol} \rho_v dv$ แต่ที่นิยมใช้มากที่สุดคือ การกระจายประจุไฟฟ้าในปริมาตร

$$\oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S} = \int_{vol} \rho_v dv$$

พิจารณาที่พื้นผิวของทรงกลมจะได้ ความหนาแน่นของสนามไฟฟ้าเป็น



$$\overline{D}_S = \frac{Q}{4\pi a^2}\overline{a}_r$$

$$\oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S} = \oint_S \frac{Q}{4\pi a^2}\overline{a}_r \bullet r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi = Q$$

D3.3. Given the electric flux density, $\mathbf{D} = 0.3r^2\mathbf{a}_r$ nC/m^2 in free space: (*a*) find $\mathbf{E}$ at point $P(r = 2, \theta = 25°, \phi = 90°)$; (*b*) find the total charge within the sphere $r = 3$; (*c*) find the total electric flux leaving the sphere $r = 4$.

Ans. $135.5\mathbf{a}_r$ V/m; 305 nC; 965 nC

D3.4. Calculate the total electric flux leaving the cubical surface formed by the six planes $x, y, z = \pm 5$ if the charge distribution is: (*a*) two point charges, 0.1 μC at $(1, -2, 3)$ and $\frac{1}{7}$ μC at $(-1, 2, -2)$; (*b*) a uniform line charge of π μC/m at $x = -2$, $y = 3$; (*c*) a uniform surface charge of 0.1 μC/m^2 on the plane $y = 3x$.

Ans. 0.243 μC; 31.4μC; 10.54 μC

วิธีทำ ของ D3.3

(a) $\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E}$

$$\overline{E} = \frac{0.3 \times 2^2 \times 10^{-9}}{1/(36\pi) \times 10^{-9}} \overline{a_r}$$

$$= 135.7 \overline{a_r} \quad \text{V/m}$$

(b) ที่ r = 3 จะได้ความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าเป็น

แล้วค่อยคูณด้วย พื้นผิวของทรงกลมได้เลย เพราะความหนาแน่นของเส้นแรงแม่เหล็กมีค่าเท่ากันที่ผิวของทรงกลม หรือถ้าค่าความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงตามค่ามุมทั้งในแนวตั้งและแนวกวาด จะต้องมีการใช้การ อินทริเกรตในการหาคำตอบ

(c) เช่นเดียวกับข้อ (b)

ข้อ D3.4

(a) เป็นการพิจารณาจากกฎของเกาส์ ที่ว่าด้วย การหาเส้นแรงไฟฟ้าที่ออกจากผิวปิดรวมทั้งหมดจะเท่ากับค่าประจุไฟฟ้าที่ผิวปิดนั้นล้อมรอบอยู่

คำตอบของข้อ นี้จึงได้เป็น

$$0.1 + 1/7 = 0.243\mu C$$

(b) $Q = \rho_L L = \pi \times 10 \times 10^{-9} = 31.4\mu C$

(c)

3.3 การใช้งานกฎของเกาส์กับการกระจายแบบสมมาตร

จากกฎของเกาส์

$$Q = \oint_S \overline{D}_S \bullet d\overline{S}$$

เราจะพิจารณาที่จะใช้มันในการหาคำตอบ ความหนาแน่นของเส้นแรงไฟฟ้าที่ผิว $\overline{D_S}$ จะง่ายขึ้นถ้าเราสามารถเลือกพื้นผิวปิดที่สอดคล้องกับ

ความแน่นเส้นแรงไฟฟ้ามีทิศทางสัมผัสหรือไม่ก็ตั้งฉากกับผิวปิด

บนส่วนของผิวปิดสำหรับ $\overline{D_S} \bullet d\overline{S} \neq 0$ D_S จะเป็นค่าคงที่

ซึ่งจากการพิจารณากรณีที่จุดประจุอยู่ที่จุดกำเนิด ถ้าผิวปิดเป็นทรงกลมที่รัศมี *r* ใดๆ จะได้ความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าตั้งฉากกับผิวทุกตำแหน่งและมีค่าคงที ดังนั้น

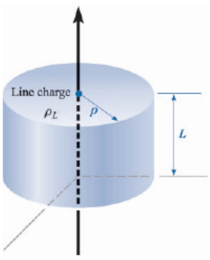
$$Q = \oint_S \overline{D_S} \bullet d\overline{S} = \oint_{sph} D_S$$
$$= D_S \oint_{sph} dS = D_S \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$
$$= 4\pi r^2 D_S$$

ดังนั้น

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \text{คูลอมบ์ต่อตารางเมตร}$$

$$\overline{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\overline{a}_r \quad \text{C/m}^2 \qquad \overline{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overline{a}_r \quad \text{V/m}$$

ในกรณีเส้นประจุไฟฟ้าความยาวไม่จำกัดที่มีการกระจายสม่ำเสมอ พิจารณาในผิวปิดทรงกระบอกที่มีความยาว *L* และ *r*



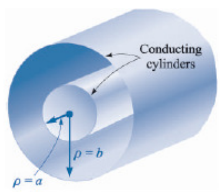
เมื่อพิจารณากฎของเกาส์จะได้

$$Q = \oint_{cyl} \overline{D} \bullet d\overline{S} = D_S \int_{sides} dS + 0\int_{top} dS + 0\int_{bottom} dS$$
$$= D_S \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} r d\phi dz = D_S 2\pi r L$$
$$D_S = D_r = \frac{Q}{2\pi r L}$$

การกระจายของประจุไฟฟ้าคงที่ ρ_L C/m ดังนั้น

$$Q = \rho_L L \text{ C} \qquad \overline{D} = \frac{\rho_L}{2\pi r}\overline{a}_r \text{ C/m}^2 \qquad \overline{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\overline{a}_r \text{ V/m}$$

แบบจำลอง Coaxial ดังรูปซ้ายมือ ซึ่งสามารถแก้ปัญหาโดยวิธีเดียวกันกับ เส้นประจุไฟฟ้า ผิวทรงกระบอกปิดมีความยาว *L* และรัศมี *r* โดยที่ $a<r<b$



$$Q = D_S 2\pi r L$$

ซึ่งประจุสามารถหาได้จากการอินทริเกรต

$$Q = \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_S a d\phi dz = 2\pi a L \rho_S$$

การกระจายของประจุเชิงเส้นสามารถหาได้จากสมการข้างต้น $\rho_L = Q/L = 2\pi a \rho_S$ ดังนั้น ความหนาแน่นของสนามไฟฟ้าเป็น

$$\overline{D_S} = \frac{\rho_L}{2\pi r}\overline{a}_r \quad \text{for} \quad a<r<b$$

ส่วนที่ $r<a$ และ $r>b$ เนื่องจากสนามไฟฟ้าจากประจุไฟฟ้าที่ผิวของตัวนำทั้งสองเกิดการหักล้างกันเนื่องจากมีทิศทางตรงกันข้ามในบริเวณดังกล่าวทั้งสอง จึงทำให้ ความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าก็มีค่าเป็นศูนย์

D3.5. A point charge of 0.25 μC is located at $r = 0$, and uniform surface charge densities are located as follows: 2 mC/m² at $r = 1$ cm, and −0.6 mC/m² at $r = 1.8$ cm. Calculate **D** at: (*a*) $r = 0.5$ cm; (*b*) $r = 1.5$ cm; (*c*) $r = 2.5$ cm. (*d*) What uniform surface charge density should be established at $r = 3$ cm to cause **D** = 0 at $r = 3.5$ cm?

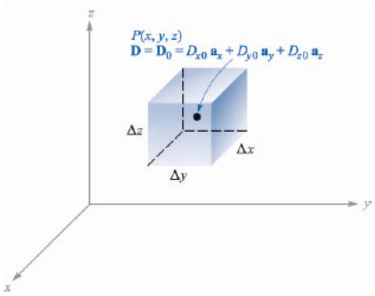
Ans. 796$\mathbf{a}_r$ μC/m²; 977$\mathbf{a}_r$ μC/m²; 40.8$\mathbf{a}_r$ μC/m²; −28.3 μC/m²

Hint: รูปแบบของประจุ เป็นรูปทรงกลม ก็สามารถหา ความหนาแน่นของเส้นแรงไฟฟ้าที่ผิวทรงกลม

3.4 การประยุกต์กฎของเกาส์กับปริมาตรอนุพันธ์

ที่จุด P มีความหนาแน่นสนามไฟฟ้า

$\overline{D} = \overline{D_0} = D_{x0}\overline{a_x} + D_{y0}\overline{a_y} + D_{z0}\overline{a_z}$ พิจารณาผิวปิดเล็กๆ ดังรูป จากกฎของเกาส์



$$\oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S} = Q$$

ปริมาตรเล็กๆ มีผิวที่ประกอบอยู่ 6 ด้าน

$$\oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S} = \int_{front} + \int_{back} + \int_{left} + \int_{right} + \int_{top} + \int_{bottom}$$

แยกพิจารณาเป็นด้านๆ ไป เช่น

$$\int_{front} = \overline{D}_{front} \cdot \Delta\overline{S}_{front} = \overline{D}_{front} \cdot \Delta y \Delta z \overline{a}_x$$

$$= D_{x,front} \Delta y \Delta z$$

ด้านหน้าในแนวแกน x ดังนั้น ความยาวที่จะนำมาคิดคือครึ่งหนึ่ง ความหนาแน่นของเส้นแรงสนามไฟฟ้า

$$D_{x,front} = D_{xo} + \frac{\Delta x}{2} \times \text{rate of change of } D_x \text{ with } x$$

$$= D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

เส้นแรงไฟฟ้าทางด้านหน้า คือ

$$\int_{front} = \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

บนแกน x ทางด้างหลัง

$$\int_{back} = \overline{D}_{back} \cdot \Delta\overline{S}_{back} = \overline{D}_{back} \cdot \Delta y \Delta z(-\overline{a}_x)$$

$$= -D_{x,back} \Delta y \Delta z$$

ความหนาแน่นของเส้นแรงสนามไฟฟ้าทางด้านลบของแกน x

$$D_{x,back} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

เส้นแรงไฟฟ้าทางด้านหลัง คือ

$$\int_{back} = \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

ถ้ารวมเส้นแรงไฟฟ้าทั้งสองบนแกน x จะได้เป็น

$$\int_{front} + \int_{back} = \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

ในทำนองเดียวกันทั้งสองแกนที่เหลือ แล้วรวมกัน เป็นเส้นแรงไฟฟ้าที่ผ่านผิวปิดข้างต้นทั้ง 6 ด้านเป็น

$$\oint_S \overline{D} \bullet d\overline{S} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$= \mathrm{Q} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v$$

การประมาณนี้จะมีค่าที่เข้าใกล้ความจริงมาก ที่ ค่าปริมาตร มีค่าเล็กมากๆ

ความหมายหลักของการพิจารณา ค่าความต่างความหนาแน่นของเส้นแรงสนามไฟฟ้าในปริมาตรนี้เปรียบเสมือนการหาผลต่างของเส้นแรงที่ผ่านเข้ามาและออกจากผิวปิดนี้ ความต่างที่ได้ก็คือผลที่เกิดจากประจุที่ถูกล้อมรอบภายในผิวปิดนั้นเอง

ประจุไฟฟ้าที่ล้อมรอบโดยปริมาตร $\Delta v = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$ x ปริมาตร $\Delta v = \Delta Q$

D3.6. In free space, let $\mathbf{D} = 8xyz^4\mathbf{a}_x + 4x^2z^4\mathbf{a}_y + 16x^2yz^3$ pC/m². (*a*) Find the total electric flux passing through the rectangular surface $z = 2$, $0 < x < 2$, $1 < y < 3$, in the $\mathbf{a}_z$ direction. (*b*) Find $\mathbf{E}$ at $P(2, -1, 3)$. (*c*) Find an approximate value for the total charge contained in an incremental sphere located at $P(2, -1, 3)$ and having a volume of 10^{-12} m³.

Ans. 1365 pC; $-146.4\mathbf{a}_x + 146.4\mathbf{a}_y - 195.2\mathbf{a}_z$ V/m; -2.38×10^{-21} C

Hint: (a) คำนวณหาด้วยการ integral บนผิวที่หรือระนาบที่มี z เป็น normal vector (b) แทนค่า x,y,z หาความหนาแน่นสนามไฟฟ้าแล้วหารด้วย ค่า permittivity ของ free space ก็จะได้ ค่าความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุดดังกล่าว (c) ใช้ $\mathrm{Q} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v$ ในการหา เพราะเป็นการหาที่ปริมาตรเล็ก (เป็นการเปลี่ยนแปลงค่าที่เกิดที่จุดสังเกต)

3.5 Divergence ไดเวอร์เจนต์

จากความสัมพันธ์ข้างต้นจะได้

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \frac{\oint_S \overline{D} \cdot d\overline{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

เนื่องจาก ปริมาตรมีค่าเล็กมากเข้าสู่ศูนย์ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \overline{D} \cdot d\overline{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho_v$$

นอกจากจะใช้กับประจุไฟฟ้าแล้ว เวกเตอร์ $\overline{D}$ สามารถเป็นอะไรก็ได้ สมมติให้เป็นเวกเตอร์ $\overline{A}$ ใดๆ ซึ่งก็จะได้ว่า

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \overline{A} \cdot d\overline{S}}{\Delta v}$$

ถ้าแทนด้วยนิยามโดยทั่วไป

$$\text{Divergence of } \overline{A} = \text{div } \overline{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \overline{A} \cdot d\overline{S}}{\Delta v}$$

รูปทั่วไปของ Divergence (div)

$$\text{div}\overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{Cartesian}$$

$$\text{div}\overline{\mathrm{D}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{Cylindrical}$$

$$\operatorname{div}\overline{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta D_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} \qquad \text{Spherical}$$

สมการข้างต้นนั้นมาจาก

$$\nabla\cdot\overline{D} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(h_2h_3D_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(h_3h_1D_v\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(h_1h_2D_w\right)\right]$$

โดยที่ h_1, h_2, h_3 แทนขนาดอ้างอิงกับหนึ่งหน่วยเวกเตอร์ซึ่งจะอ้างอิงจากระบบพิกัดมูลฐานที่เป็นที่คุ้นเคยคือ Cartesian นั่นเอง ส่วน u, v, w เป็นสัญลักษณ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดใดๆ ซึ่งขนาดของ h ที่สัมพันธ์กัน พิจารณาจากความยาวของส่วนโค้งที่อยู่ในแนวของเวกเตอร์หรือแกนพิกัดต่างเช่น ในแนว ϕ ของพิกัดทรงกระบอกนั้นความยาวอนุพันธ์ของเส้นโค้งที่วางในแนวนี้ คือ $dL_2=h_2d\phi=\rho d\phi$ เป็นต้น

D3.7. In each of the following parts, find a numerical value for div **D** at the point specified: (*a*) $\mathbf{D} = (2xyz - y^2)\mathbf{a}_x + (x^2z - 2xy)\mathbf{a}_y + x^2y\mathbf{a}_z$ C/m² at $P_A(2, 3, -1)$; (*b*) $\mathbf{D} = 2\rho z^2\sin^2\phi\,\mathbf{a}_\rho + \rho z^2\sin 2\phi\,\mathbf{a}_\phi + 2\rho^2 z\sin^2\phi\,\mathbf{a}_z$ C/m² at $P_B(\rho = 2, \phi = 110^\circ, z = -1)$; (*c*) $\mathbf{D} = 2r\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_r + r\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{a}_\theta - r\sin\phi\,\mathbf{a}_\phi$ at $P_C(r = 1.5, \theta = 30^\circ, \phi = 50^\circ)$.

Ans. −10.00; 9.06; 2.18

Hint: เป็นการทดสอบการใช้ divergence ที่ระบบพิกัด ต่างๆ

3.6 สมการที่ 1 (สมการแรก) ของแมกซ์เวลล์ในสนามไฟฟ้าสถิตย์ (Maxwell's First Equation)

จากที่อธิบายมาแล้วทั้งหมดข้างต้น สมการที่ 1 ของ แมกซ์เวลล์ คือ

$$\nabla\cdot\overline{D} = \rho_v$$

D3.8. Determine an expression for the volume charge density associated with each **D** field following: (*a*) $\mathbf{D} = \frac{4xy}{z}\mathbf{a}_x + \frac{2x^2}{z}\mathbf{a}_y - \frac{2x^2y}{z^2}\mathbf{a}_z$; (*b*) $\mathbf{D} = z\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + z\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi + \rho\sin\phi\,\mathbf{a}_z$; (*c*) $\mathbf{D} = \sin\theta\sin\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{a}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi$.

Ans. $\frac{4y}{z^3}(x^2 + z^2)$; 0; 0.

D3.9. Given the field $\mathbf{D} = 6\rho\sin\frac{1}{2}\phi\,\mathbf{a}_\rho + 1.5\rho\cos\frac{1}{2}\phi\,\mathbf{a}_\phi$ C/m², evaluate both sides of the divergence theorem for the region bounded by $\rho = 2$, $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $z = 0$, and $z = 5$.

Ans. 225; 225

Hint: D3.8 ยังเป็นการใช้ divergence ที่พิกัดต่างๆ ในการหาคำตอบ

3.7 The vector operator ∇ and the divergence theorem

จากส่วนที่ได้กล่าวมาแล้วเรื่องของการใช้ divergence ของความหนาแน่นของระบบ พิกัดต่างๆ สิ่งจะกล่าวต่อไปคือการประยุกต์ใช้งาน ซึ่งเริ่มจาก Gauss's Law

$$\oint_S \overline{D}\cdot d\overline{S} = Q$$

และสิ่งที่ได้กล่าวมาแล้วว่า ในการหาประจุอิสระที่กระจายอย่างสม่ำเสมอในปริมาตร

$$Q = \int_{vol} \rho_v dv$$

และจากทฤษฎีของ Divergence

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho_v$$

เมื่อแทนความหนาแน่นของประจุอิสระต่อหน่วยปริมาตร จึงได้ความสัมพันธ์ของการ อินทิเกรตเป็น

$$\oint_S \overline{D} \cdot d\overline{S} = Q = \int_{vol} \rho_v dv = \int_{vol} \nabla \cdot \overline{D} dv$$

ซึ่งเป็นการความสัมพันธ์ของการอินทิเกรตเชิงผิวกับเชิงปริมาตรของเวกเตอร์หนึ่ง ซึ่งจะเป็นตัวเลือกในการแก้ปัญหาโจทย์คำนวณที่เป็นประโยชน์อีกหนึ่งตัวเลือก แต่ต้องมีการใช้อย่างระมัดระวัง ต้องสอดคล้องกับข้อสรุปนี้

The integral of the normal component of any vector field over a closed surface is equal to the integral of the divergence of this vector field through the volume enclosed by the surface.

Example Let $\overline{D} = 4xy^2 z\bar{i} + 3x^3 y\bar{j} + 6x^2 yz\bar{k}$. Determine the total charge within the region bounded by x = 2 and 3, y = 0 and 2 and z = -1 and 0 by the both side of the divergence theorem.

วิธีทำ หาผลรวมของเส้นแรงไฟฟ้าที่ตั้งฉากกับผิวที่พิจารณา เป็นส่วนๆ ไป

Example $\overline{D} = \dfrac{20}{\rho^2}\left(-\sin^2\phi\overline{a_\rho} + \sin 2\phi\overline{a_\phi}\right)$ C/m^2 find the total charge within the volume, $1 < \rho < 2$, $0 < \phi < \dfrac{\pi}{2}$ and $0 < z < 1$ by the two different methods.