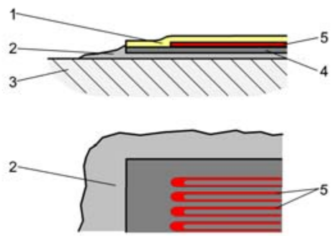
1301 706: Data Analysis and Statistics for Research

การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติเพื่อการวิจัย



บทที่ 3

การวัดความเค้นและความเครียดของวัสดุ

Stress & Strain Measurement

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

ธนรัฐ ศรีวีระกุล

เนื้อหา

บทนำ

- Strain Gauge เป็นเครื่องมือที่ใช้วัดความเครียดในวัสดุต่างๆ ซึ่งสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการวิเคราะห์ความเครียดของวัสดุ, วัดแรง, แรงบิด และ ความดัน
- ซึ่งมีประโยชน์ในการออกแบบโครงสร้างของวัสดุให้มีความแข็งแรงพอเพียงกับงานที่ต้องการใช้

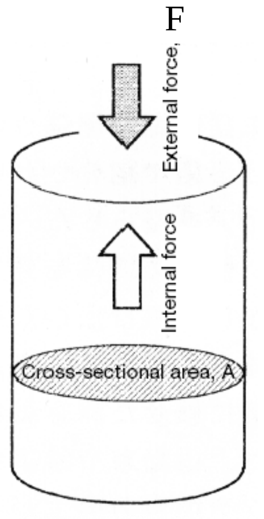
Stress & Strain

- ค่าของความเค้น – Stress กับความเครียด – Strain จะมีความสัมพันธ์กัน ทำให้สามารถนำการวัดความเครียดมาใช้วิเคราะห์ความเค้นเพื่อใช้หาแรงที่กระทำต่อวัสดุได้

Stress (σ) - ความเค้นของวัสดุ

- ความเค้นของวัสดุ คือ อัตราส่วนของแรงที่ต้านแรงกระทำต่อวัตถุต่อพื้นที่หน้า ตัด มีหน่วยเป็น ปาสคาล

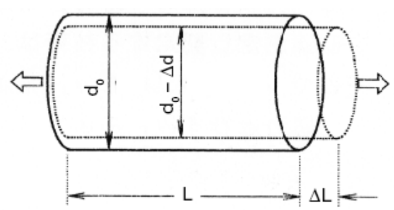
$$\sigma = \frac{F}{A} \text{ (Pa or N/m}^2\text{)}$$



Strain (ε) – ความเครียดของวัสดุ

- ความเครียดของวัสดุ คือ อัตราส่วนระหว่าง ความยาวที่เปลี่ยนแปลงเมื่อได้รับแรงกระทำ ต่อความยาวปกติที่ไม่ได้รับแรงกระทำ ไม่มีหน่วย แต่ในบางครั้งเรียกว่า μm/m หรือ $\mu\varepsilon$ (ไมโครสเตรน)
- ความเครียดตามแนวยาว

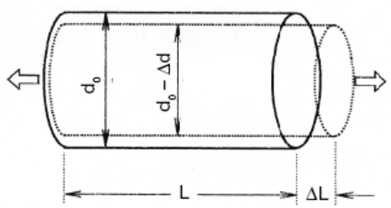
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L \text{ (change in length)}}{L \text{ (original length)}}$$



Strain (ε) – ความเครียดของวัสดุ

- ความเครียดของวัสดุ คือ อัตราส่วนระหว่าง ความยาวที่เปลี่ยนแปลงเมื่อได้รับแรงกระทำต่อความยาวปกติที่ไม่ได้รับแรงกระทำ ไม่มีหน่วยแต่ในบางครั้งเรียกว่า μm/m หรือ $\mu\varepsilon$ (ไมโครสเตรน)
- ความเครียดตามแนวขวาง

$$\varepsilon_2 = \frac{-\Delta d}{d_0}$$



Poisson's ratio

- ค่าความเครียดมีสองทิศทางคือ ตามแนวยาวและตามขวางของวัสดุ
- อัตราส่วนระหว่างค่าความเครียดตามแนวขวางต่อแนวยาวเรียกว่า อัตราส่วน Poisson(ν)

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right| = 0.3$$

- โดยทั่วไปแล้วจะมีค่าประมาณ 0.3

Poisson's ratio

Siméon Denis Poisson (1781-1840)
French mathematician/mathematical physicist. Born in Pithiviers, Loiret, France and brought up in Fontainebleau. He entered l'Ecole Polytechnique in 1798 and became a professor following Fourier in 1806. His work titled "Treaté du méchanique (Treatise on Mechanics)" long played the role of a standard textbook.
Especially renowned is Poisson's equation in potential theory in mass. In the mathematic field, he achieved a series of studies on the definite integral and the Fourier series. Besides the abovementioned mechanics field, he is also known in the field of mathematical physics, where he developed the electromagnetic theory, and in astronomy, where he published many papers.
Late in life, he was raised to the peerage in France. He died in Paris.

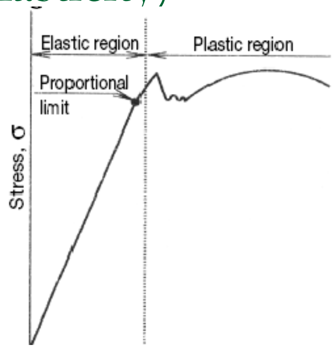
Hooke's law (law of elasticity)

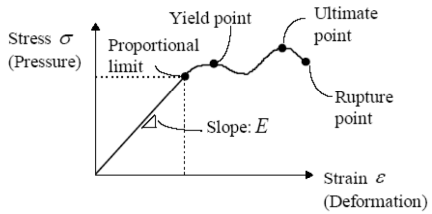
- ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด
- เป็นความสัมพันธ์ที่ได้จากการทดสอบ

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Hooke's law (law of elasticity)

- ค่า E คือ ค่าความยืดหยุ่นของยัง (modulus of linearity, young's modulus) ซึ่งจะเปลี่ยนไปตามวัสดุ
- ช่วงยืดหยุ่นของวัสดุนั้นเป็นความสัมพันธ์ที่คงที่





Stress-Strain Diagram
(Mild Steel)

Hooke's law (law of elasticity)

Hooke's law (law of elasticity)
In most materials, a proportional relation is found between stress and strain borne, as long as the elastic limit is not exceeded. This relation was experimentally revealed by Hooke in 1678, and thus it is called "Hooke's law" or the "law of elasticity." The stress limit to which a material maintains this proportional relation between stress and strain is called the "proportional limit" (each material has a different proportional limit and elastic limit). Most of today's theoretical calculations of material strength are based on this law and are applied to designing machinery and structures.

Robert Hooke (1635-1703)
English scientist. Graduate of Cambridge University. Having an excellent talent especially for mathematics, he served as a professor of geometry at Gresham College. He experimentally verified that the center of gravity of the earth traces an ellipse around the sun, discovered a star of the first magnitude in Orion, and revealed the renowned "Hooke's law" in 1678.

Young's modulus

Thomas Young **(1773-1829)**

English physician, physicist and archaeologist. His genius early asserted itself and he has been known as a pioneer in reviving the light wave theory. From advocating the theory for several years, he succeeded in discovering interference of light and in explaining Newton's ring and diffraction phenomenon in the wave theory. He is especially renowned for presenting Young's modulus and giving energy the same scientific connotation as used at the present.

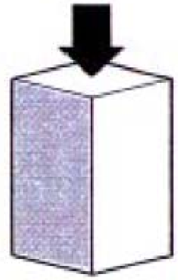
ขนาดของความเค้น

- พิจารณาจากแท่งเหล็กขนาด 1 ตร.ซม. ที่มีแรง 10kN มากระทำจากทางด้านบน
- จะมีค่าความเค้นดังนี้

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{10\text{kN (1020kgf)}}{1 \times 10^{-4}\text{m}^2 \text{ (1cm}^2)} = \frac{10 \times 10^3\text{N}}{1 \times 10^{-4}\text{m}^2}$$

$$= 100\text{MPa (10.2kgf/mm}^2)$$

10kN
(approx. 1020kgf)



Iron bar (E = 206GPa)
of 1 x10^{-4}m² (1 sq.cm)

ขนาดของความเค้น

- จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความเค้นทำให้สามารถคำนวณค่าความเครียดได้

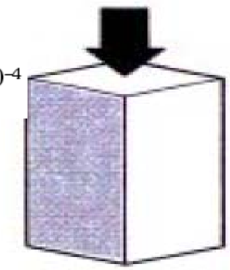
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{100\text{MPa}}{206\text{GPa}} = \frac{100 \times 10^6}{206 \times 10^9} = 4.85 \times 10^{-4}$$

- โดยปกติแล้วจะเขียนออกมาในรูปหนึ่งในล้านส่วน (part per million)

$$\varepsilon = \frac{485}{1000000} = 485 \times 10^{-6}$$

- หรืออีกนัยหนึ่ง 485 μm/m หรือ 485 με หรือ 485×10^{-6} strain

10kN
(approx. 1020kgf)



Iron bar (E = 206GPa)
of 1 x10^{-4}m² (1 sq.cm)

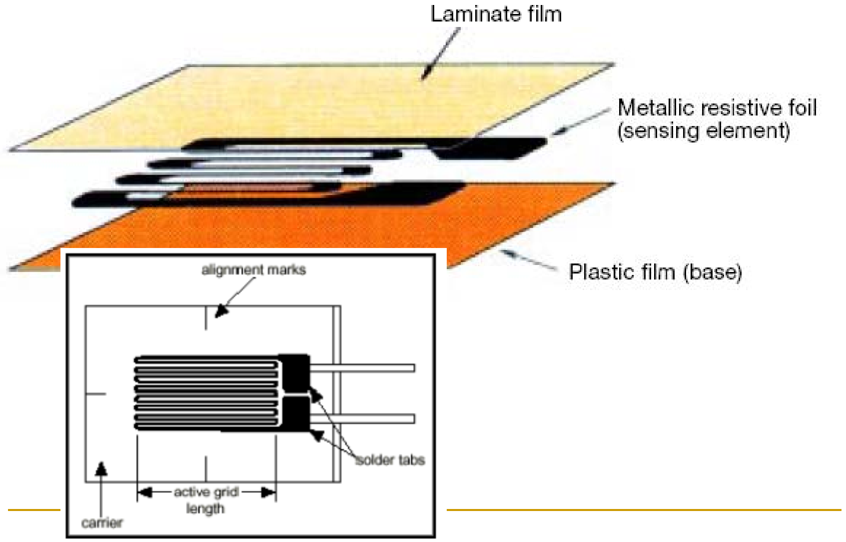
ขนาดของความเค้น

- ความเค้นมีสองแบบคือ
  - แบบที่ได้จากการยืด (tensile stress)
  - แบบที่ได้จากการอัด (Compressive Stress)
- ซึ่งสามารถแยกแยะได้โดยการใช้เครื่องหมาย + หรือ -
  - Elongation (+)
  - Contraction (-)

Stress & Strain

- จะเห็นได้ว่าความสัมพันธ์ทั้งสองนั้นทำให้การวัดความเครียดสามารถนำมาใช้วิเคราะห์ความเค้นได้ $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- สามารถนำค่าความเค้นมาใช้วัด แรง หรือความดันได้

โครงสร้างสเตรนเกจโลหะ



Strain Gauge

- สเตรนเกจใช้ความต้านทานในการวัดโดยมีความสัมพันธ์

$$K = \frac{\Delta R / R}{\Delta L / L} = \frac{\Delta R / R}{\varepsilon}$$

- ค่า K คือ gauge factor ขึ้นอยู่กับชนิดของโลหะโดยทั่วไปมีค่าเฉลี่ยประมาณ 2

Example

- จงหาค่าความต้านทานที่เปลี่ยนไปเนื่องจากค่าสเตรนขนาด 1000×10^{-6} strain โดยที่สเตรนเกจมีค่าความต้านทานเริ่มต้นที่ 120Ω
- สมมติค่า $K = 2$

Example

$$K = \frac{\Delta R / R}{\Delta L / L} = \frac{\Delta R / R}{\varepsilon}$$

$$\frac{\Delta R}{120\ (\Omega)} = 2 \times 1000 \times 10^{-6}$$

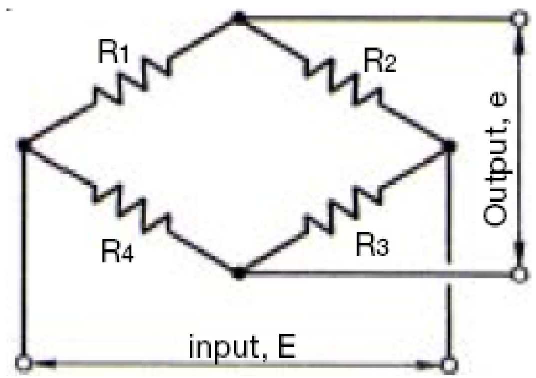
$$\Delta R = 120 \times 2 \times 1000 \times 10^{-6} = 0.24\Omega$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{0.24}{120} = 0.002 = 0.2\%$$

Example

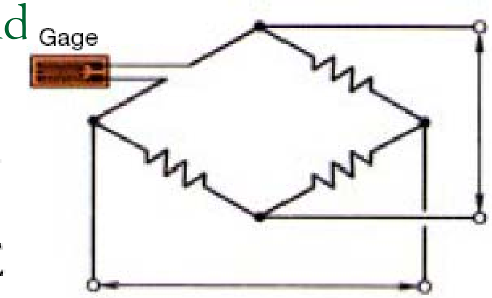
- จะเห็นได้ว่าเป็นการยากมากที่จะตรวจจับความเปลี่ยนแปลงของค่าความต้านทานได้อย่างแม่นยำ เครื่องวัดความต้านทานแบบธรรมดาไม่สามารถใช้ได้
- จำเป็นต้องใช้วงจรบริจต์เข้ามาขยายสัญญาณความต้านทาน

Wheatstone Bridge



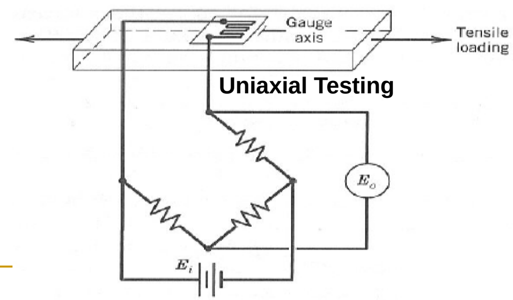
R1 = R2 = R3 = R4, or
R1 x R3 = R2 x R4

Wheatstone Brid



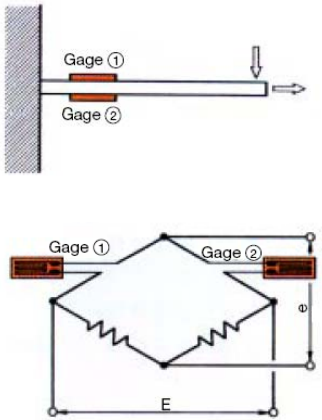
$$e = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta R}{R} \cdot E$$

$$e = \frac{1}{4} \cdot K \cdot \varepsilon \cdot E$$



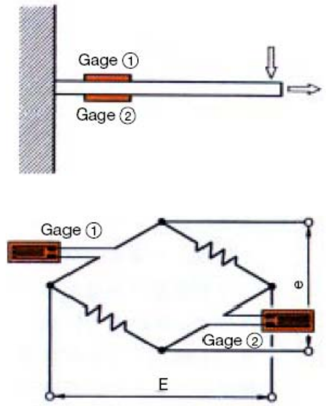
2 gauges system

$$e = \frac{1}{4} K (\varepsilon 1 - \varepsilon 2) E$$



2 gauges system

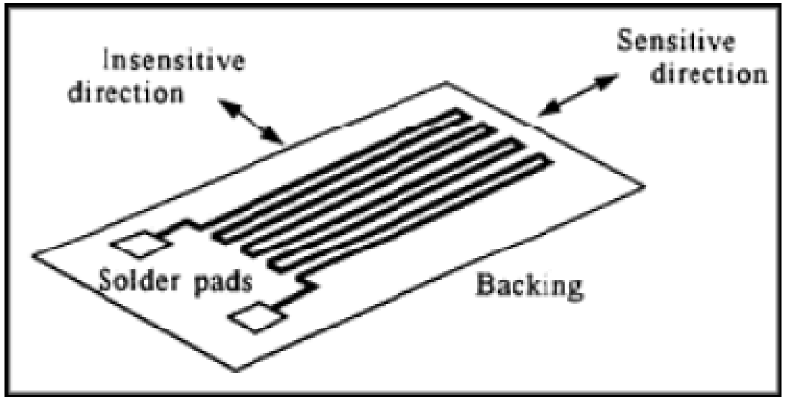
$$e = \frac{1}{4} K (\varepsilon 1 + \varepsilon 2) E$$



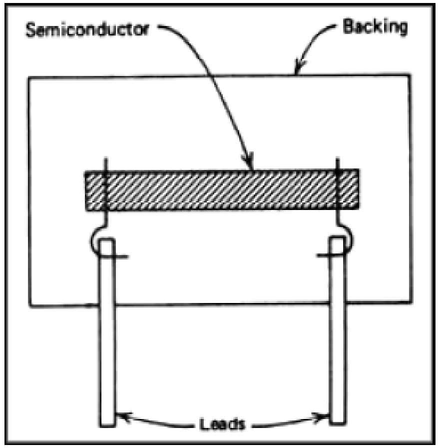
Strain Gauge

- สเตรนเกจใช้ความต้านทานในการวัดมีอยู่ด้วยกันสองแบบหลักคือ
  - แบบโลหะ (Metallic Strain Gauge)
  - แบบสารกึ่งตัวนำ (Semiconductor Strain Gauge)

แบบโลหะ (Metallic Strain Gauge)



แบบสารกึ่งตัวนำ (Semiconductor Strain Gauge)



Gage Factors

Platinum (Pt 100%)	6.1
Platinum-Iridium (Pt 95%, Ir 5%)	5.1
Platinum-Tungsten (Pt 92%, W 8%)	4.0
Isoelastic (Fe 55.5%, Ni 36% Cr 8%, Mn 0.5%)	3.6
Constantan / Advance / Copel (Ni 45%, Cu 55%)	2.1
Nichrome V (Ni 80%, Cr 20%)	2.1
Karma (Ni 74%, Cr 20%, Al 3%, Fe 3%)	2.0
Armour D (Fe 70%, Cr 20%, Al 10%)	2.0
Monel (Ni 67%, Cu 33%)	1.9
Manganin (Cu 84%, Mn 12%, Ni 4%)	0.47

แบบสารกึ่งตัวนำ (Semiconductor Strain Gauge)

- มีข้อดีที่มีค่า K ที่สูงมาก ~200
- มีค่าความต้านทานสูง
- มีค่า hysteresis, fatigue ต่ำ
- มีขนาดเล็กสามารถนำมาใช้สร้างหัววัดแรงดันได้

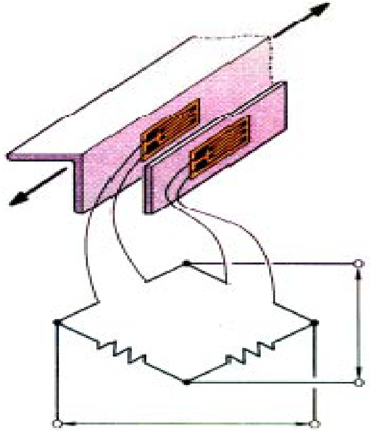
แบบสารกึ่งตัวนำ (Semiconductor Strain Gauge)

- ข้อเสีย คือ สัญญาณที่ได้ออกมาไม่เป็นเส้นตรง
- และมีความอ่อนไหวกับอุณหภูมิอย่างมาก

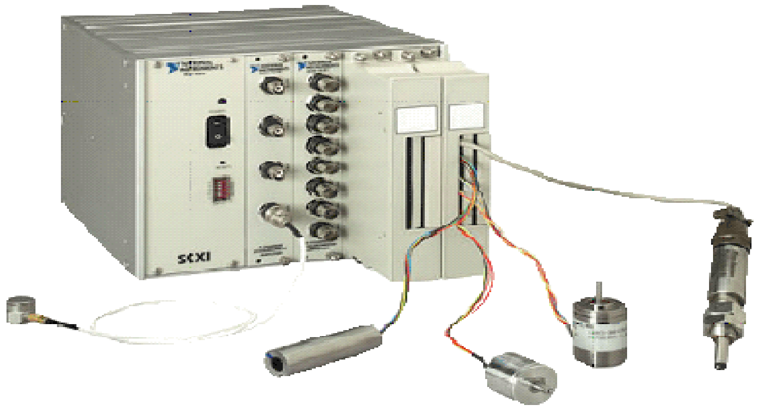
$$K = \frac{T_0}{T} K_0 + C_1 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \varepsilon$$

Temperature Compensation

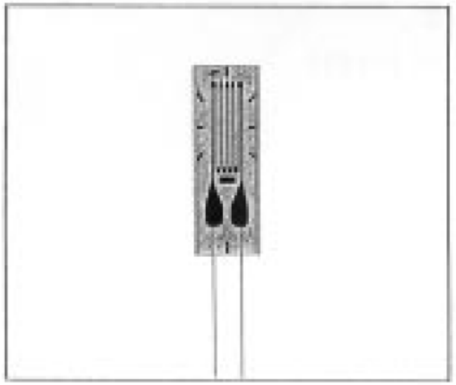
- Active-Dummy Method
- ใช้สเตรนเกจสองตัว ตัวหนึ่งใช้วัดความเครียด ส่วนอีกตัวใช้เป็นตัวปรับเทียบอุณหภูมิ
- เมื่ออุณหภูมิของเกจทั้งสองตัวเท่ากันก็ ค่าความต้านทานที่เท่ากันจะหักล้างค่าความผิดพลาดจากอุณหภูมิ



Amplifier



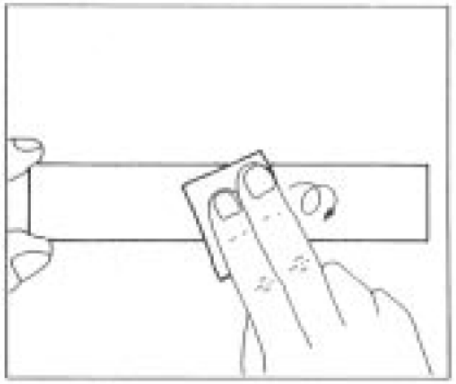
การติดตั้ง



Select the strain gage model and gage length which meet the reqirements of the measuring object and purpose. For the linear expansion coefficient of the gage applicable to the measuring object, refer to page 13. Select the most suitable one from the 11 choices.

การติดตั้ง

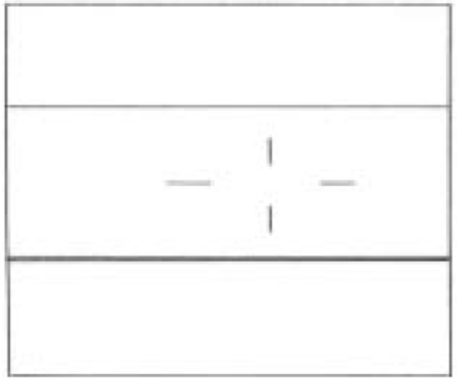
(2) Remove dust and paint.



Using a sand cloth (#200 to 300), polish the strain-gage bonding site over a wider area than the strain-gage size.
Wipe off paint, rust and plating, if any, with a grinder or sand blast before polishing.

การติดตั้ง

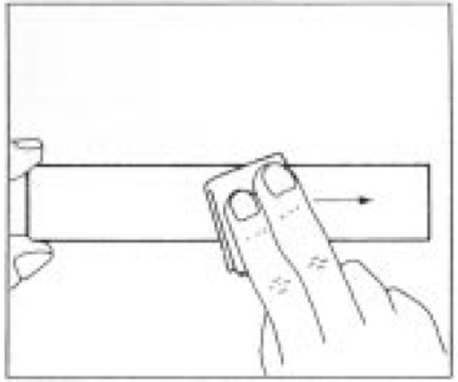
(3) Decide bonding position.



Using a #2 pencil or a marking-off pin, mark the measuring site in the strain direction. When using a marking-off pin, take care not to deeply scratch the strain-gage bonding surface.

การติดตั้ง

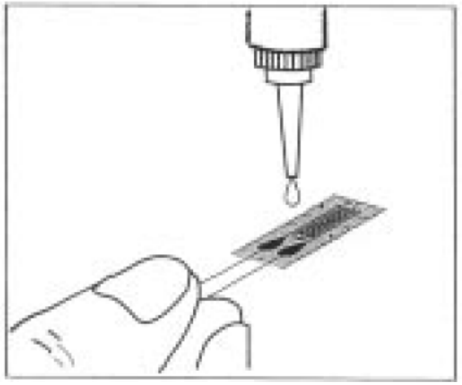
(4) Remove grease from bonding surface and clean.



Using an industrial tissue paper (SILBON paper) dipped in acetone, clean the strain-gage bonding site. Strongly wipe the surface in a single direction to collect dust and then remove by wiping in the same direction. Reciprocal wiping causes dust to move back and forth and does not ensure cleaning.

การติดตั้ง

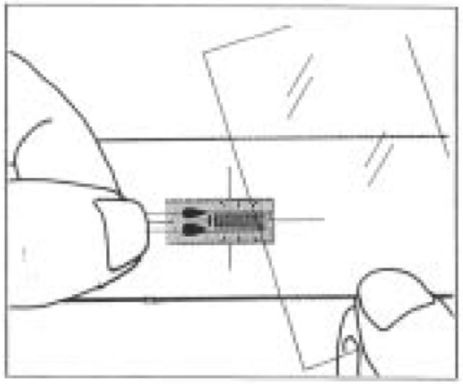
(5) Apply adhesive.



Ascertain the back and front of the strain gage. Apply a drop of CC-33A adhesive to the back of the strain gage. Do not spread the adhesive. If spreading occurs, curing is adversely accelerated, thereby lowering the adhesive strength.

การติดตั้ง

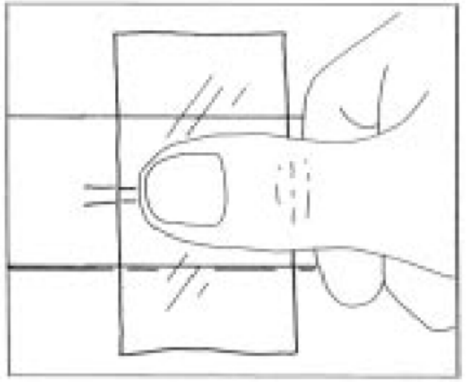
(6) Bond strain gage to measuring site.



After applying a drop of the adhesive, put the strain gage on the measuring site while lining up the center marks with the marking-off lines.

การติดตั้ง

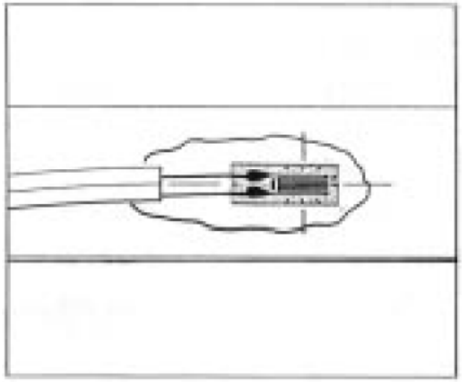
(7) Press strain gage.



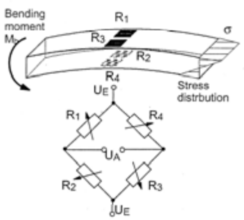
Cover the strain gage with the accessory polyethylene sheet and press it over the sheet with a thumb. Quickly perform steps (5) to (7) as a series of actions. Once the strain gage is placed on the bonding site, do not lift it to adjust the position. The adhesive strength will be extremely lowered.

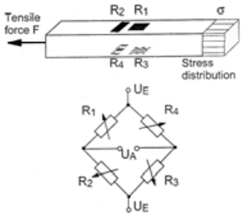
การติดตั้ง

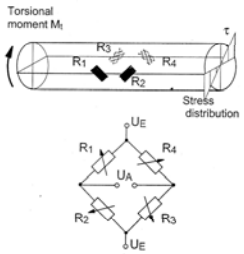
(8) Complete bonding work.



After pressing the strain gage with a thumb for one minute or so, remove the polyethylene sheet and make sure the strain gage is securely bonded. The above steps complete the bonding work. However, good measurement results are available after 60 minutes of complete curing of the adhesive.

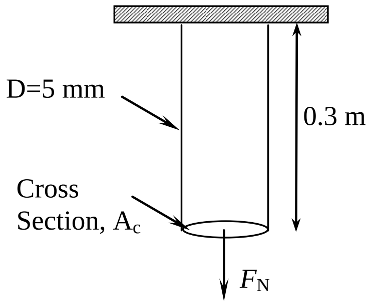






แบบฝึกหัด

- 1. Calculate the change in length of a steel rod ($E_m = 20 \times 10^{10}$ Pa) which has a length of 0.3 m and a diameter of 5 mm. The rod supports a mass of 50 kg in a standard gravitation field in such a way that a state of uniaxial tension is created in the rod.



แบบฝึกหัด

- KNOWN: A steel rod (circular cross-section) having:

$$L = 0.3 \text{ m}$$
$$D = 5 \text{ mm}$$
$$E_m = 20\times10^{10} \text{ Pa}$$
$$m = 50 \text{ kg}$$

- FIND: The change in length of the rod,
- ASSUMPTIONS: Rod is elastically deformed, such that

$$\sigma = \varepsilon \cdot E_m$$

แบบฝึกหัด

SOLUTION:The force resulting from 50 kg in standard gravity is

$$F_N = \frac{ma}{g_c} = \frac{(50 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{\left(1.0 \dfrac{\text{kg m}}{\text{s}^2 \text{ N}}\right)}$$

$$F_N = 490 \text{ N}$$

แบบฝึกหัด

- The resulting uniaxial stress is

$$\sigma_a = \frac{F_N}{A_c}$$

$$A_c = \frac{\pi}{4}\left(5\times10^{-3}\right)^2 = 1.96\times10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\sigma_a = \frac{490 \text{ N}}{1.96\times10^{-5} \text{ m}^2} = 25\times10^6 \text{ Pa}$$

แบบฝึกหัด

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_m} = \frac{25\times10^6 \text{ Pa}}{20\times10^{10} \text{ Pa}} = 125\times10^{-6}$$

$$\delta L = L\cdot\varepsilon_a = (0.3)\left(125\times10^{-6}\right) = 37.5\times10^{-6} \text{ m}$$

- The change in length is 37.5 μm

แบบฝึกหัด

- 2. A resistance strain gauge with $R = 120\ \Omega$ and a gauge factor of 2 is placed in an equal-arm Wheatstone bridge in which all the resistances are equal to $120\ \Omega$. If the maximum gauge current is to be 0.05 A, what is the maximum allowable bridge excitation voltage?

  - KNOWN: A strain gauge with *R*1 = 120 Ω, *GF* = 2 in an equal arm Wheatstone bridge *R2* = *R*3 = *R4* = 120 Ω. Maximum gauge current is 0.05 A
  - FIND: Maximum input bridge voltage
  - SOLUTION: From a basic circuit analysis, assuming infinite meter resistance

แบบฝึกหัด

$$i_1 = \frac{E_i}{R_1 + R_2}$$

$$E_i = i_1\left(R_1 + R_2\right)$$

$$E_i = \left(0.05\ \mathrm{A}\right)\left(240\ \Omega\right) = 12\ \mathrm{V}$$

แบบฝึกหัด

- 3. A strain gauge having a nominal resistance of $350\ \Omega$ and a gauge factor of 1.8 is mounted in an equal-arm bridge, which is balanced at a zero applied strain condition. The gauge is mounted on a 1-cm^2 aluminum rod, having $E_m = 70$ GPa. The gauge senses axial strain. The bridge output is 1 mV for a bridge input of 5 V. What is the applied load, assuming the rod is in uniaxial tension?
- KNOWN: A strain gauge has a nominal resistance of 350 Ω, and *GF* = 1.8, and senses axial strain. The gauge is mounted on a 1 cm2 aluminum rod (*E*m = 70 GPa) *Eo* = 1 mV, *E*i = 5 V.
- FIND: Applied load, assuming uniaxial tension

แบบฝึกหัด

- Solution

$$e = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta \mathrm{R}}{\mathrm{R}} \cdot \mathrm{E}$$

$$\delta R / R = 0.0008 \qquad \delta R = 0.28\ \Omega$$

- ความเครียด

$$\delta R / R = \varepsilon \cdot GF \qquad \varepsilon = 0.00044$$

แบบฝึกหัด

- ความเค้น

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_m} \qquad \sigma = \varepsilon \cdot E_m = (0.00044)(70\text{ GPa})$$

$$\sigma = 0.0308\text{ GPa}$$

- แรง

$$\sigma = \frac{F_N}{A_c} \qquad \mathrm{A_c} = \frac{\pi}{4}\left(1\times10^{-2}\text{ m}\right)^2 = 7.854\times10^{-5}\text{ m}^2$$

$$F_N = \left(7.854\times10^{-5}\text{ m}^2\right)\left(0.0308\times10^9\text{ Pa}\right)$$

$F_N = 2419$ N

แบบฝึกหัด

- 11.13

Two strain gauges are mounted so that they sense axial strain on a steel member in uniaxial tension. The 120-Ω gauges form two legs of a Wheatstone bridge, and are mounted on opposite arms. For a bridge excitation voltage of 4 V and a bridge output voltage of 120 μV under load, estimate the strain in the member. What is the resistance change experienced by each gauge? The gauge factor for each of the strain gauges is 2 and E_m for steel is 29×10^6 psi.

แบบฝึกหัด

- 11.13
- KNOWN: R = 120 Ω
- Gauges mounted on opposite arms of bridge

  *E*i= 4 V *E*o = 120 μV

  GF = 2 *Em* = 29 x 106 psi

- FIND: Resistance change for each gauge

แบบฝึกหัด

- 11.13
- SOLUTION:

  For this bridge

$$e = \frac{1}{4}\mathrm{K}\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,\mathrm{E}$$

- which implies a bridge constant of 2.

  Thus

$$\frac{\delta E_0}{E_i} = \frac{GF}{4}(2\varepsilon_a) = \frac{\kappa_B GF}{4}(\varepsilon_{max})$$

$$\varepsilon_{\max} = \left(\frac{120\times10^{-6}}{4}\right)\left(\frac{4}{2(2)}\right) = 3.0\times10^{-5}$$

κ_B=bridge constant, actual bridge output to a single gauge output.

แบบฝึกหัด

- 11.13
- Since

$$\frac{\delta R}{R} = \varepsilon_{\max} GF \qquad \delta R = (120\ \Omega)(3\times10^{-5})(2)$$

- The change in resistance is

$$\delta R = 0.0072\ \Omega$$