Linear Programming (Duality)

Primal

$$MaxZ = 300x_1 + 250x_2$$

Subject to: $2x_1 + x_2 \le 40$

$x_1 + 3x_2 \le 45$

$x_1 \le 12$

$x_1, x_2 \ge 0$

Dual

$$MinW = 40u_1 + 45u_2 + 12u_3$$

Subject to: $2u_1 + u_2 + u_3 \ge 300$

$u_1 + 3u_2 \ge 250$

$u_1, u_2, u_3 \ge 0$

อ.ฐิตินนท์ ศรีสุวรรณดี

ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

Homework

Ex. บริษัทผู้ผลิตสินค้าแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 3 ชนิด ในการผลิตสินค้าทั้ง 3 ชนิด ต้องใช้วัตถุดิบ ก ข และ ค ในปริมาณที่ต่างกัน และทำกำไรได้แตกต่างกันดังนี้

สินค้า / วัตถุดิบ	จำนวนวัตถุดิบที่ใช้ในการผลิตสินค้า 1 หน่วย (กิโลกรัม)			จำนวนวัตถุดิบที่มี (กิโลกรัม)
	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 3	
ก	4	3	2	400
ข	7	9	2	800
ค	8	7	12	1,000
กำไร (บาท/หน่วย)	18	10	12	

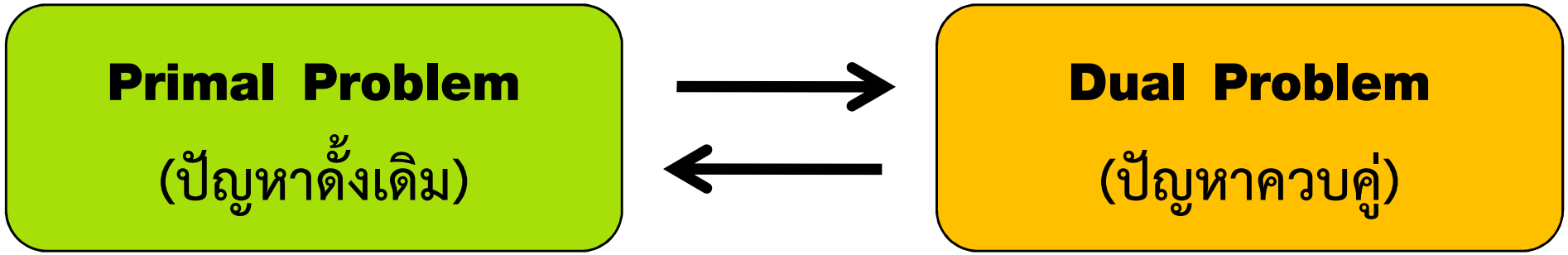
หากนักศึกษาเป็นผู้ช่วยของบริษัทนี้จะทำการผลิตสินค้าชนิดใด ในปริมาณเท่าไรจึงจะทำให้บริษัทได้กำไรในการขายสินค้ามากที่สุด (ส่งสัปดาห์ถัดไปในชั่วโมงเรียน)(ให้ใช้วิธี Simplex Method)

Homework

Ex. บริษัทผู้ผลิตสินค้าของที่ระลึกแห่งหนึ่งผลิตกล่องใส่เครื่องประดับ 3 ขนาด ทำจากไม้ไผ่บริษัทสั่งซื้อวัตถุดิบที่เป็นไม้ไผ่ขนาดเล็กขัดเงาเน้นเนื้อไม้ที่มีลวดลายสวยงามจากโรงงานต่างจังหวัด ซึ่งจัดส่งให้ 4,000 ชิ้น นำมาประกอบเป็นกล่องใส่เครื่องประดับ 3 ขนาด ขนาดเล็ก ขนาดกลาง และขนาดใหญ่ กล่องขนาดเล็กใช้ไม้ไผ่ 10 ชิ้น และใช้เวลาในการผลิตกล่องละ 2 ชั่วโมง กล่องขนาดกลางใช้ไม้ไผ่ 20 ชิ้น และใช้เวลาในการผลิตกล่องละ 3 ชั่วโมง กล่องขนาดใหญ่ใช้ไม้ไผ่ 40 ชิ้น และใช้เวลาในการผลิตกล่องละ 6 ชั่วโมง บริษัทมีเวลาในการผลิตรวม 1,000 ชั่วโมง กล่องเครื่องประดับขนาดเล็ก ขนาดกลาง และขนาดใหญ่ที่ผลิตได้จะมีกำไรกล่องละ 30 บาท 40 บาท และ 100 บาท ตามลำดับ บริษัทควรผลิตกล่องเครื่องประดับขนาดต่างๆ อย่างละกี่กล่อง (ส่งสัปดาห์ถัดไปในชั่วโมงเรียน)(ให้ใช้วิธี Simplex Method)

อ.ฐิตินนท์ ศรีสุวรรณดี

Duality Property

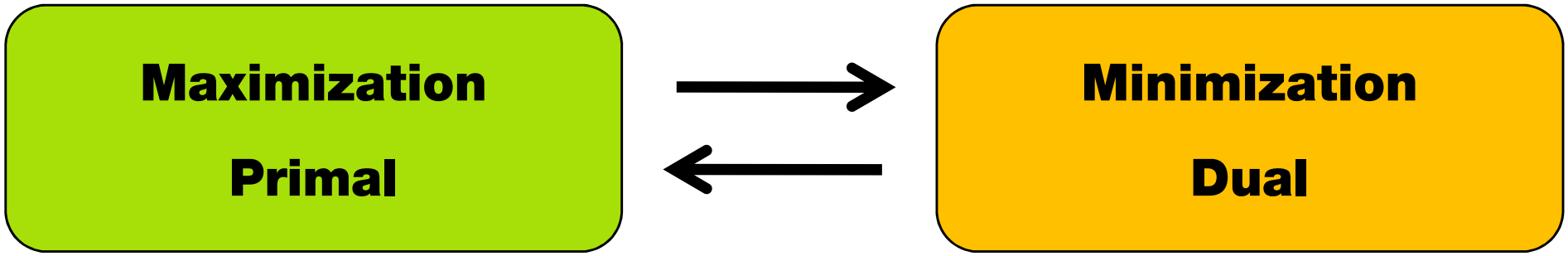


- จากการค้นพบโดยวิธีทางคณิตศาสตร์ ทำให้รู้ว่าคุณสมบัติของการโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) ก็คือ ทุกๆ ปัญหาของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงจะมีปัญหาที่ควบคู่กันเหมือนกับฝาแฝด

- The original problem is called the primal and the other is called the dual.

- If the primal is a maximization problem, the dual is a minimization problem, and vice versa.

Duality Property



- An optimal solution to the dual exists only when the primal has an optimal solution, and vice versa.
- Both the primal and dual problems have the same optimal value of the objective function.
- The dual of the dual is the primal.
- The solution of the dual problem can be obtained from the solution of the primal problem, and vice versa.
- The dual variables may assume negative values.

Formulation of the dual

Primal Problem

$$MaxZ = 300x_1 + 250x_2$$

$$\text{Subject to: } 2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1 + 3x_2 \le 45$$

$$x_1 \le 12$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Objective

- An optimal solution to the dual exists only when the primal has an optimal solution, and vice versa.

Decision Variable

- For each constraint in the primal (not nonnegativity constraints), there is one decision variable in the dual.

Formulation of the dual

Objective Function

- The coefficient of each decision variable in the objective function of the dual is equal to the right-hand side of the corresponding constraint in the primal.

Constraints

- Before structuring the dual constraints, all primal constraints should be transformed to ≤ in maximization and in ≥ minimization.
- For each decision variable in the primal, there is a corresponding constraint in the dual.
- The right-hand side of the dual constraints is the same as the corresponding coefficients of the objective function in the primal.

Formulation of the dual

Solution to the dual

-The dual problem can be solved using the same method used for the primal problem.

-When the primal is solved using the simplex method, the solution to the dual is automatically obtained.

-The final tableau of the primal's solution provides both the optimal values of the primal and the dual problems.

-The optimal solution to the dual problem can be read directly in the $c_j - z_j$ row of the tableau. Let u_j be a dual variable. The optimal value of u_j is $-(c_j - z_j)$ for the primal maximization and $(c_j - z_j)$ for the primal minimization problems.

Formulation of the dual

Primal Problem

$$MaxZ = 300x_1 + 250x_2$$

$$\text{Subject to: } 2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1 + 3x_2 \le 45$$

$$x_1 \le 12$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Dual Problem

Formulation of the dual

Basic	Unit Profit	Quantity	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Ratio
S_1	0	5	0	0	1	−1/3	−5/3	
X_2	250	11	0	1	0	1/3	−1/3	
X_1	300	12	1	0	0	0	1	
z_j			300	250	0	0	0	
c_j			300	250	0	$\frac{250}{3}$	$\frac{650}{3}$	
$c_j - z_j$			0	0	0	$\frac{-250}{3}$	$\frac{-650}{3}$	

Formulation of the dual

Primal Problem

Objective Function

$$Min\ Z = 45X_1 + 12X_2$$

Subject to.

$$X_1 + X_2 \geq 300$$
$$3X_1 \geq 250$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Dual Problem

Formulation of the dual

Basic	Unit Profit	Quantity	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	Ratio
X_2	12	650/3	0	1	−1	1/3	1	
X_1	45	250/3	1	0	0	−1/3	0	
z_j			45	12	0	0	M	
c_j			45	12	−12	−11	12	
$c_j - z_j$			0	0	12	11	M−12	

Formulation of the dual

Meaning of the dual variable

-The dual variables are called the shadow prices.

-The dual variables measure the change in the value of the objective function of the primal when one additional unit of a specific resource (the right-hand side) is added.

-The shadow price of the i^{th} constraint is the amount by which the optimal z-value is improved (increased in the maximization problems and decreased in the minimization problems) if the right-hand side of the i^{th} constraint is increased by one.

Finding the dual of a non–normal Max problem

$$\text{Maximization } Z = 7x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

Subject to.

$$2x_2 + 3x_3 = 15$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 3$$

$$x_1 + x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- If the i^{th} primal constraint is a ≥ constraint, then the corresponding dual variable u_i must be $u_i \leq 0$.
- If the i^{th} primal constraint is an equality constraint, then the corresponding dual variable u_i is unrestricted in sign.
- If the i^{th} primal variable x_i is unrestricted in sign, then the i^{th} dual constraint will be an equality constraint.

Finding the dual of a non–normal Min problem

Minimization $Z = 9x_1 + 5x_2$

Subject to.

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 36$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- If the i^{th} primal constraint is a ≤ constraint, then the corresponding dual variable u_i must be $u_i \leq 0$.
- If the i^{th} primal constraint is an equality constraint, then the corresponding dual variable u_i is unrestricted in sign.
- If the i^{th} primal variable x_i is unrestricted in sign, then the i^{th} dual constraint will be an equality constraint.

Formulation of the dual

How to read the optimal dual solution from the $c_j - z_j$ Row of the optimal tableau of the primal problem

Primal Maximization Problem

For the primal ≤ constraint

- Optimal value of dual variable $u_j = -(c_j - z_j)$ of the slack variable S_j

For the primal ≥ constraint

- Optimal value of dual variable $u_j = (c_j - z_j)$ of the Surplus variable S_j

For the primal = constraint

- Optimal value of dual variable $u_j = -(c_j - z_j) - M$ of the artificial variable S_j

Formulation of the dual

How to read the optimal dual solution from the $c_j - z_j$ Row of the optimal tableau of the primal problem

Primal Minimization Problem

For the primal ≤ constraint

- Optimal value of dual variable $u_j = -(c_j - z_j)$ of the slack variable S_j

For the primal ≥ constraint

- Optimal value of dual variable $u_j = (c_j - z_j)$ of the Surplus variable S_j

For the primal = constraint

- Optimal value of dual variable $u_j = -(c_j - z_j) + M$ of the artificial variable S_j

แบบฝึกหัดส่งในห้อง

Ex.1 จงหาคำตอบด้วยวิธี Simplex Method และคำตอบที่ดีที่สุดมีมากกว่าหนึ่งคำตอบหรือไม่ ถ้ามีจงหาคำตอบที่ดีที่สุดอีกหนึ่งคำตอบ

$$\text{Min} = x_1 - 3x_2 + x_3$$

Subject to.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 7$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Ex.2 ให้เปลี่ยนปัญหา Primal ในข้อ Ex.1 เป็นปัญหา Dual และหาค่า Optimal ของ Dual ทุกตัวจากตารางสุดท้ายในข้อ 1.1

Homework

Ex.1 จงหาคำตอบด้วยวิธี Simplex Method และคำตอบที่ดีที่สุดมีมากกว่าหนึ่งคำตอบหรือไม่ ถ้ามีจงหาคำตอบที่ดีที่สุดอีกหนึ่งคำตอบ

$$\text{Max} = 9x_1 + 5x_2$$

Subject to.

$$4x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 48$$

$$x_1 \geq 5$$

$$3x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ex.2 ให้เปลี่ยนปัญหา Primal ในข้อ Ex.1 เป็นปัญหา Dual และหาค่า Optimal ของ Dual ทุกตัวจากตารางสุดท้ายในข้อ 1.1

<u>ส่งการบ้านในสัปดาห์ถัดไปก่อนเข้าห้องเรียน</u>

Thank you

Operation Research

วันที่ 1 ธันวาคม 2555 เวลา 9.00 – 10.00 น. En6507

สอบครั้งที่ 1 เรื่อง Formulate Model/Graphical Method

อ.ฐิตินนท์ ศรีสุวรรณดี

ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี