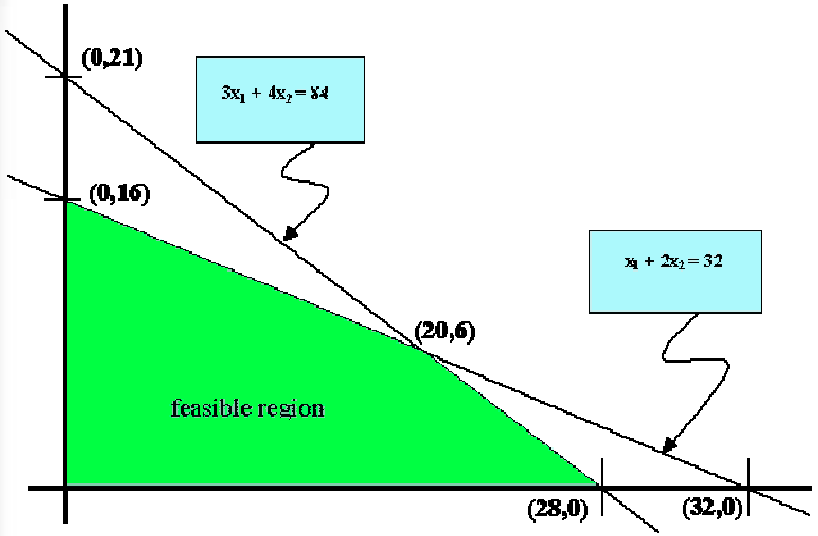
Linear Programming



Basis	Unit Profit	Quantity	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Ratio
s_1	0	40	2	1	1	0	0	
s_2	0	45	1	3	0	1	0	
s_3	0	12	1	0	0	0	1	
c_j			300	250	0	0	0	
z_j			0	0	0	0	0	
$c_j - z_j$			300	250	0	0	0	

อ.ฐิตินนท์ ศรีสุวรรณดี

ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

วิธี Graphical Method ในการแก้ปัญหา Min

Ex. บริษัท Siam Clock กำลังพิจารณาเพิ่มรูปแบบสินค้าโดยใช้วัสดุที่ราคาไม่แพง และเน้นรูปลักษณ์ที่โดดเด่น ทันสมัย การผลิตไม่จำเป็นต้องใช้ช่างฝีมือ แต่ต้องใช้เวลาเครื่องจักรในฝ่ายผลิต ทั้งนี้ฝ่ายออกแบบได้เสนอนาฬิกาแบบใหม่ 2 แบบ ซึ่งใช้เวลาเครื่องจักรผลิตเรือนละ 10 นาที และ 5 นาที ตามลำดับ บริษัทได้จัดสรรเวลาในสายการผลิตเพื่อผลิตนาฬิกาแบบใหม่ 2 แบบนี้ไว้ไม่เกิน 11 ชั่วโมง

เนื่องจากเป็นสินค้าใหม่ที่มีระบบการผลิตและมีลักษณะที่แตกต่างจากสินค้าเดิมในระยะแรกบริษัทต้องการทดสอบการตอบรับจากลูกค้าก่อน จึงยังไม่ทุ่มเทเงินทุนมากนักการผลิตนาฬิกาแบบที่ 1 มีต้นทุนเรือนละ 50 บาท และนาฬิกาแบบที่ 2 มีต้นทุนเรือนละ 80 บาท บริษัทต้องการหาจำนวนการผลิตนาฬิกาแบบใหม่โดยมีต้นทุนรวมต่ำที่สุด ทั้งนี้ยอดรวมในการผลิตนาฬิกาแบบใหม่ทั้ง 2 แบบนี้ต้องไม่ต่ำกว่าวันละ 80 เรือน และจะไม่ผลิตนาฬิกาแบบที่ 2 เกิน 60 เรือน

อ.ฐิตินนท์ ศรีสุวรรณดี

ลักษณะผลลัพธ์แบบต่างๆ

1. ผลลัพธ์ที่เหมาะสมที่สุดมีหลายผลลัพธ์ (Alternative optimal solution)

Maximize Z = 8X + 10Y

subject to. 0.8X + Y <= 40 _____(1)

0.6X + 0.3Y <= 21 _____(2)

Y <= 32 _____(3)

จุดยอด	พิกัด (X,Y)	Z = 8X+10Y
A	0,30	300
B	12.5,20	400*
C	25,20	400*
D	35,0	280
O	0,0	0

ลักษณะผลลัพธ์แบบต่างๆ

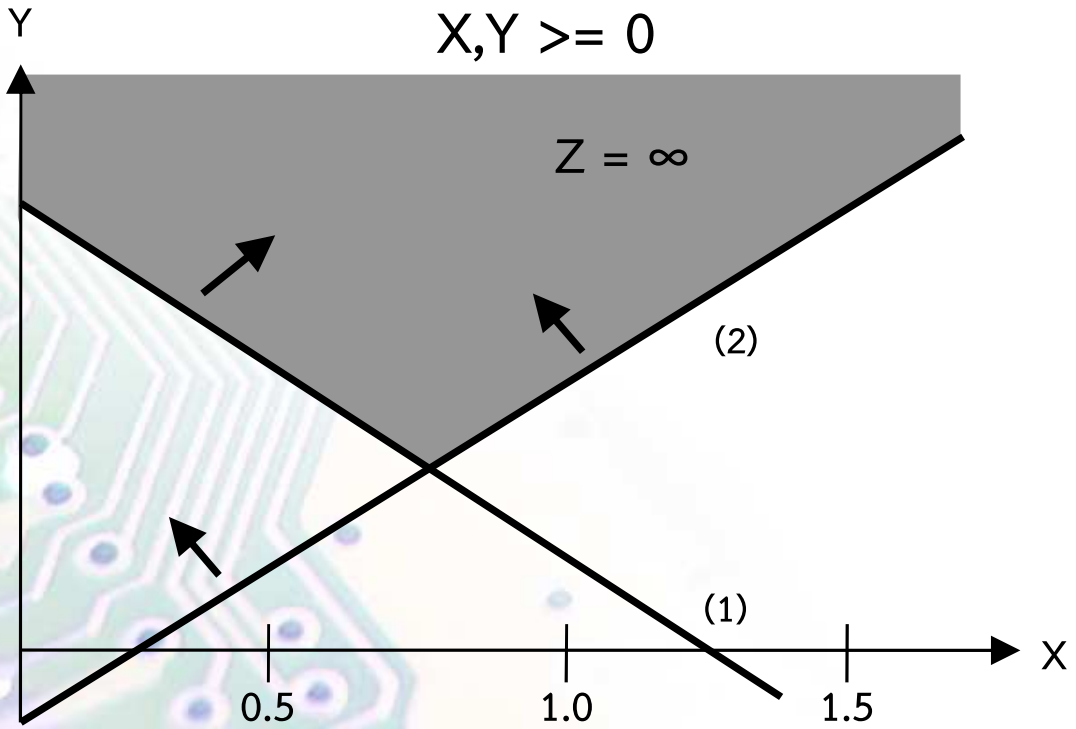
2. กรณีผลลัพธ์ไม่มีขีดจำกัด (Unbounded solution)

Maximize Z = 3X + 2Y

subject to. 5X + 6Y >= 6 _____(1)

4X - 3Y <= 2 _____(2)

X,Y >= 0



ลักษณะผลลัพธ์แบบต่างๆ

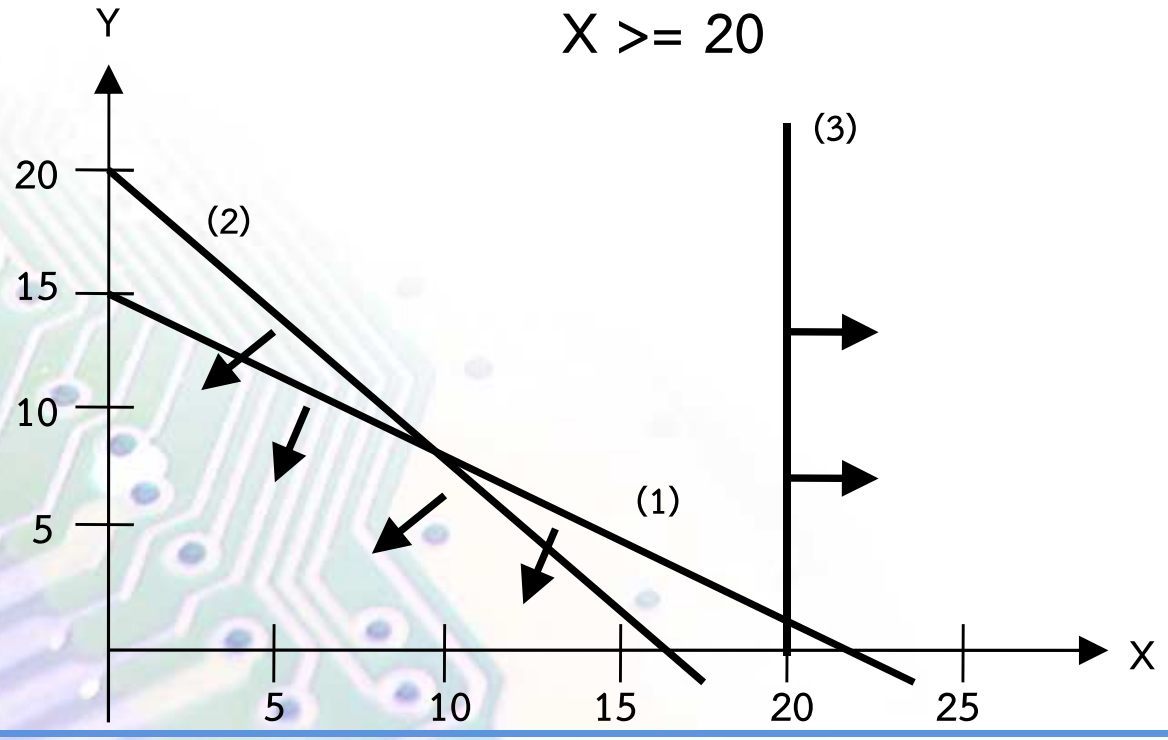
3. กรณีไม่มีบริเวณผลลัพธ์ที่เป็นไปไม่ได้ (No feasible area)

Maximize Z = 25X + 30Y

subject to. 2X + 3Y <= 45 _____(1)

5X + 4Y <= 80 _____(2)

X >= 20 _____(3)



ลักษณะผลลัพธ์แบบต่างๆ

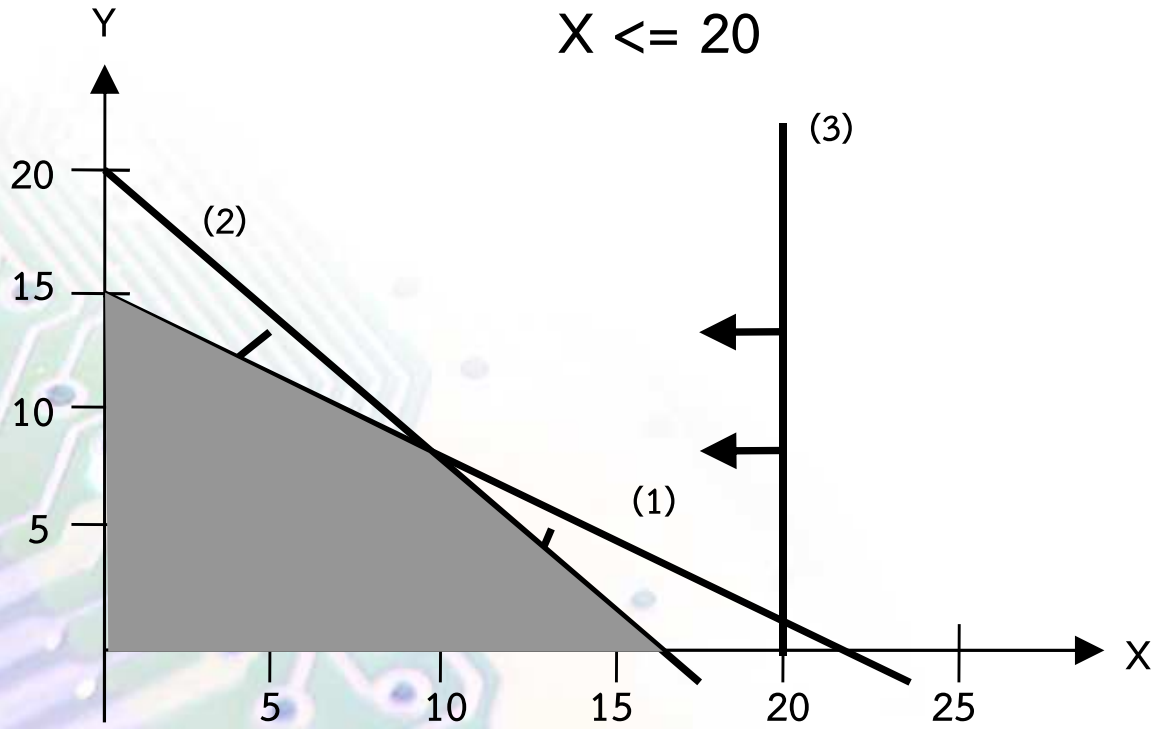
4. กรณีมีเงื่อนไขที่ไม่จำเป็น (Redundant Constraint)

Minimize Z = 25X + 30Y

subject to. 2X + 3Y <= 45 _____(1)

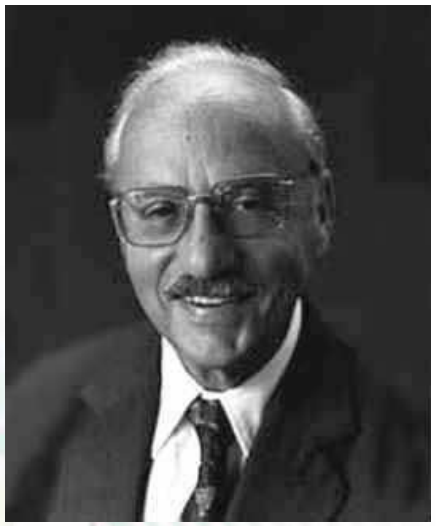
5X + 4Y <= 80 _____(2)

X <= 20 _____(3)



Simplex Method

- Simplex Method พัฒนาขึ้นเมื่อ พ.ศ. 2490 โดย George B. Dantzig นักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกัน ผู้ซึ่งเป็น 1 ใน 3 ของผู้คิดค้นตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น



George B. Dantzig

Von Neumann

Leonid V. Kantorovich

- In the simplex method, the search usually starts at the origin and moves to that adjacent corner that increases (for maximization) or decreases (for minimization) the value of the objective function the most.

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

1. Step 1: Standardize the problem.
2. Step 2: Generate an Initial Solution.
3. Step 3: Test for Optimality. If the solution is optimal, go to Step 6. Otherwise, go to Step 4.
4. Step 4: Identify the Incoming and Outgoing Variables.
5. Step 5: Generate an Improved Solution. Go to Step 3.
6. Step 6: Check for other Optimal Solutions.

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

1 Step 1: Standardize the problem.

For less-than-or-equal-to constraints ($\leq$)

-Add a slack variable (s)

$$2x_1 + x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 40$$

-At the origin ($x_1 = 0$ and $x_2 = 0$), s_1 becomes 40 (OK).

For greater-than-or-equal-to constraints ($\geq$)

-Use both a surplus variable (s) and an artificial variable (a) to form an equation.

$$x_1 + x_2 \geq 300$$

$$x_1 + x_2 - s_2 + a_2 = 300$$

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

1 Step 1: Standardize the problem.

For constraints with an equality (=)

-Add an artificial variable.

$$3x_1 + x_2 = 10$$

-When $x_1 = 0$ and $x_2 = 0$, 0 = 10 which is unacceptable so an artificial variable is added to the equation.

$$3x_1 + x_2 + a_3 = 10$$

-Once the constraints have been modified, the problem can be written in a standard form.

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

1 Step 1: Standardize the problem.

Standard Form

- All slack, surplus and artificial variables must be written in the objective function.
- The coefficient of the slack and surplus variables is zero in the objective function because they do not generate any profit or have any costs.
- For a maximization problem, the coefficient of the artificial variable is -M
- For a minimization problem, the coefficient of the artificial variable is M.

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

1 Step 1: Standardize the problem.

Ex:

$$Max\ z = 300x_1 + 250x_2$$

Subject to: $2x_1 + x_2 \le 40$

$x_1 + 3x_2 \le 45$

$x_1 \le 12$

$x_1, x_2 \ge 0$

$$Max\ z = 300x_1 + 250x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

Subject to: $2x_1 + x_2 + s_1 = 40$

$x_1 + 3x_2 + s_2 = 45$

$x_1 + s_3 = 12$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0$

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

1 Step 1: Standardize the problem.

$$Min\, z = 45x_1 + 12x_2$$

Subject to: $x_1 + x_2 \geq 300$

$3x_1 \geq 250$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$Min\, z = 45x_1 + 12x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1 + Ma_2$$

Subject to: $x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 300$

$3x_1 - s_2 + a_2 = 250$

$x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0$

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

2 Step 2: Generate an Initial Solution.

-Consider the standardized maximization problem.

$$Max\ z = 300x_1 + 250x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

Subject to: $2x_1 + x_2 + s_1 = 40$

$$x_1 + 3x_2 + s_2 = 45$$

$$x_1 + s_3 = 12$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

- วิธี Simplex Method จะกำหนดตัวแปรส่วนหนึ่งให้มีเท่ากับศูนย์ ซึ่งจะเรียกตัวแปรนี้ว่า nonbasic variable ถ้ากำหนดการเชิงเส้นมีตัวแปร n ตัว และมีเงื่อนไข m ข้อ จำนวนตัวแปร nonbasic variable = n – m ส่วนตัวแปรที่เหลือจะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งเราเรียกว่า basic variable ในการตั้งผลลัพธ์เบื้องต้นจะพิจารณาที่จุดกำเนิดก่อน ซึ่งจุดนี้มีค่า $X_1 = 0, X_2 = 0$

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

2 Step 2: Generate an Initial Solution.

Basis	Unit Profit	Quantity	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Ratio
s_1	0	40	2	1	1	0	0	
s_2	0	45	1	3	0	1	0	
s_3	0	12	1	0	0	0	1	
c_j			300	250	0	0	0	
z_j			0	0	0	0	0	
$c_j - z_j$			300	250	0	0	0	

- ช่อง Basic แสดงตัวแปรที่เป็น Basic Variable

- ช่อง Unit Profit/Cost Column แสดงสัมประสิทธิของตัวแปร Basic Variable ในสมการวัตถุประสงค์

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

2 Step 2: Generate an Initial Solution.

- ช่อง Quantity บอกถึงค่าของตัวแปร Basic Variable

- ช่อง Columns of Decision, Slack and Surplus Variables บอกถึงการใช้ทรัพยากรหรือค่าสัมประสิทธิในแต่ละ Constraint

- ช่อง Ratio บอกถึงอัตราส่วนระหว่าง Quantity กับ ค่าในแถว Incoming

- C_j แสดงถึงค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรต่างๆ ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์

- Z_j คือ กำไร/ต้นทุนที่ลดลงถ้ามีการเพิ่มค่าตัวแปรตัวที่ j ขึ้น 1 หน่วย (Unit Profit * ค่าในช่อง Columns of Decision, Slack and Surplus Variables)

- $C_j - Z_j$ คือ กำไร/ต้นทุนที่จะได้รับจากการเพิ่มค่าตัวแปรตัวที่ j ขึ้น 1 หน่วย คำนวณได้จากค่า C_j หักด้วยค่า Z_j

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

3 Step 3: Test for Optimality. If the solution is optimal, go to Step 6. Otherwise, go to Step 4.

-Examine the $c_j - z_j$ row in the tableau.

-For the maximization problems, the solution is optimal if every value in the $c_j - z_j$ row is nonpositive (zero or negative).

- For the minimization problems, the solution is optimal if all values in the $c_j - z_j$ row are nonnegative (zero or positive).

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

4 Step 4: Identify the Incoming and Outgoing Variables.

Incoming Variable

- An incoming variable is currently a nonbasic variable

-For the maximization problems, the incoming variable is the variable with the largest positive value (coefficient) in the $c_j - z_j$ row.

- For the minimization problems, the incoming variable is the variable with the largest negative value in the $c_j - z_j$ row.

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

4 Step 4: Identify the Incoming and Outgoing Variables.

Outgoing Variable

- An outgoing variable is currently a basic variable
- To determine the outgoing variable, compute the ratio of the Quantity to the coefficient of the incoming variable for each basis row.
- For both the maximization and minimization problems, the outgoing variable is the basic variable with the smallest ratio.
-The coefficient of the incoming variable in the outgoing row is called the pivot element.

อ.ฐิตินนท์ ศรีสุวรรณดี

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

5 Step 5: Generate an Improved Solution. Go to Step 3.

-The solution is improved by introducing the incoming variable into the basis and removing the outgoing variable.

-Transform the row of the outgoing variable, then the other basis rows and finally transform the z_j and $c_j - z_j$ rows.

-The c_j row does not change.

ขั้นตอนของวิธี Simplex Method

6 Step 6: Check for other Optimal Solutions.

- Check แถว $C_j - Z_j$ ดูตัวแปร nonbasic variable ถ้ามีค่าเป็น 0 แสดงว่าปัญหานี้มีคำตอบหลายคำตอบ (Multiple Solution)
- The nonbasic variable with the zero value of $C_j - Z_j$ can enter the basis without changing the value of the objective function (creating another feasible solution).

Homework

Ex. บริษัทผู้ผลิตสินค้าแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 3 ชนิด ในการผลิตสินค้าทั้ง 3 ชนิด ต้องใช้วัตถุดิบ ก ข และ ค ในปริมาณที่ต่างกัน และทำกำไรได้แตกต่างกันดังนี้

สินค้า / วัตถุดิบ	จำนวนวัตถุดิบที่ใช้ในการผลิตสินค้า 1 หน่วย (กิโลกรัม)			จำนวนวัตถุดิบที่มี (กิโลกรัม)
	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 3	
ก	4	3	2	400
ข	7	9	2	800
ค	8	7	12	1,000
กำไร (บาท/หน่วย)	18	10	12	

หากนักศึกษาเป็นผู้ช่วยของบริษัทนี้จะทำการผลิตสินค้าชนิดใด ในปริมาณเท่าไรจึงจะทำให้บริษัทได้กำไรในการขายสินค้ามากที่สุด (ส่งสัปดาห์ถัดไปในชั่วโมงเรียน)(ให้ใช้วิธี Simplex Method)

Homework

Ex. บริษัทผู้ผลิตสินค้าของที่ระลึกแห่งหนึ่งผลิตกล่องใส่เครื่องประดับ 3 ขนาด ทำจากไม้ไผ่บริษัทสั่งซื้อวัตถุดิบที่เป็นไม้ไผ่ขนาดเล็กขัดเงาเน้นเนื้อไม้ที่มีลวดลายสวยงามจากโรงงานต่างจังหวัด ซึ่งจัดส่งให้ 4,000 ชิ้น นำมาประกอบเป็นกล่องใส่เครื่องประดับ 3 ขนาด ขนาดเล็ก ขนาดกลาง และขนาดใหญ่ กล่องขนาดเล็กใช้ไม้ไผ่ 10 ชิ้น และใช้เวลาในการผลิตกล่องละ 2 ชั่วโมง กล่องขนาดกลางใช้ไม้ไผ่ 20 ชิ้น และใช้เวลาในการผลิตกล่องละ 3 ชั่วโมง กล่องขนาดใหญ่ใช้ไม้ไผ่ 40 ชิ้น และใช้เวลาในการผลิตกล่องละ 6 ชั่วโมง บริษัทมีเวลาในการผลิตรวม 1,000 ชั่วโมง กล่องเครื่องประดับขนาดเล็ก ขนาดกลาง และขนาดใหญ่ที่ผลิตได้จะมีกำไรกล่องละ 30 บาท 40 บาท และ 100 บาท ตามลำดับ บริษัทควรผลิตกล่องเครื่องประดับขนาดต่างๆ อย่างละกี่กล่อง (ส่งสัปดาห์ถัดไปในชั่วโมงเรียน)(ให้ใช้วิธี Simplex Method)

Thank you

Operation Research

อ.ฐิตินนท์ ศรีสุวรรณดี

ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี